Math. P.
305 d

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36621108120010
S
<36621108120010
Bayer. Staatsbibliothek

Erste Sammlung

Leipzig bey Gerhard Fleischer
dem Jüngern.
1796.

Neu bearbeitet und darge

von

Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und

Zum Druck beförder

und mit

Anmerkungen, auch einem kurzen Abrisse der co
Methode und ihrer Anwendung auf die

versehen

von

Carl Friedrich Hindenbu

Leipzig

bei Gerhard Fleischer dem J

1796.

98. D

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Sr. Hochwohlgebohrnen

dem

Herrn

Obristwachtmeister von Zach

zu Gotha.

<36621810120019

<36621810120019

Bayer. Staatsbibliothek

Ew. Hochwohlgebohrnen

haben meine bisherigen Bemühungen, die Analysis durch Anwendung der Combinationsmethode und einer, größtentheils darauf sich gründenden, allgemeinen Zeichensprache zu erweitern, mit **Ihrem** sehr schätzbaren Beyfalle beehrt, und dadurch, so wie durch die thätigste Mitwirkung zu schneller Ausbreitung, diesen Kenntnissen bereits mehrere Kenner und Liebhaber im Auslande gewonnen, die auf dem gewöhnlichen Wege, zumal bey den Hindernissen, die den Wissenschaften itzt überall in den Weg treten, nur erst spät, Manche vielleicht gar nicht, dazu gelangt seyn würden.

Gegenwärtige Schrift von mir, die hier in Begleitung einiger fremden sehr wichtigen Aufsätze verwandten Inhalts erscheint, ist recht eigentlich dazu bestimmt, alles Dunkele, das

Ew. Hochwohlgebohrnen

Leipzig,
den 20. August
1796.

ganz ergebenster,
Carl Friedrich Hindenb

wandten Mathematik zugesendet
Wichtigkeit ihres Inhalts und der Umsta
gen der nöthigen Abwechselung der M
alle in Ein Heft kommen konnten, brachten
Entschlusse, selbige, als einen ersten B
Archive, besonders herauszugeben, und m
ausführlichen Abhandlung von mir, die
rische Analysis betreffend, zu beglei

Den ersten Aufsatz über das Polyn
rem erhielt ich durch Herrn Hofrath K
selbiger von Herrn Etatsrathe Tetens zu
fürs Archiv war zugesendet worden. E
als einem Betrachte merkwürdig: theils
len nützlichen Bemerkungen, die hier ge
kommen, theils aber und vorzüglich, we
inn aufgeführten neuen, sehr einfachen
tionsverfahrens, welches an Leichtig

urg.

Allgemeinheit und Leichtigkeit; auch ist
anderes Verfahren an ihrer Stelle vermögend,
Wesentliche combinatorischer Involutio
darzustellen oder zu erreichen.

In der darauf folgenden zweyten Abhandlung
Herr Professor Klügel das Polynomialtheo
in der größten Ausdehnung in Betrachtung gez
hat gleich Anfangs seiner beiden Hauptformen,
direct-combinatorischen (von doppelter
und der involutorisch-recurrirenden, Er
nung gethan, auch beide in der Folge ausführlich
handelt. Zuerst wird angemerkt (worauf man
immer gehörig Rücksicht genommen zu haben sche
daß die eigentliche Analysis überhaupt die
men der Größen zum Gegenstande habe, w
sogleich einestheils die große Nützlichkeit der Co
nationsmethode, deren wichtigstes Geschäf
Entwickelung, Darstellung und Betrach

das
nen

hat
rem
gen,
der
Art)
wäh-
bge-
nicht
nt),
zor-
raus
nbi-
die
ung

Eigenthum der Differentialrechnung, sond
gehöre der Analysis des Endlichen zu; d
nicht anders seyn, weil sonst die Ana
Größen, die diesen so wichtigen Satz in seine
nicht-entbehren kann, kein für sich bestehend
würde. Der polynomische Lehrsatz wird
in seinen beiden combinatorischen Formen
von dem Binomialtheorem (das als ei
von jenem abgeleitet wird) für jede Gattu
nenten erwiesen. Herr Professor Klüge
gemeinheit seines Beweises auf den Satz
die analytischen Operationen, Multiplicat
Erhebung zu Potenzen u. s. w. nur alle
des zu Suchenden aus der Form des Geg
men, die Größen aber unbestimmt la
Form der entwickelten Function, ohne best
darstellen); daher denn auch die verschied
Beschaffenheit der Exponenten, auf die (

durch dieselbe, bey den übrigen Sätzen gebrauchte, M[…] thode ergaben. Die von mir diesen wichtigen Aufsä[…] beygefügten Vorerinnerungen überheben mich der M[…] eine kurze Inhaltsanzeige davon hier beyzubrin[…] Ich will nur so viel überhaupt erinnern. Herr […] Kramp hat sehr frühzeitig die große Wichtigkeit […] den ausgebreiteten Nutzen der combinatorisch[…] Analysis anerkannt, und hinterher selbst thät[…] Antheil an Bearbeitung und mehrerer Ausbreitung […] ses ganz neuen Zweiges der Analysis genommen. […] ich davon hier aufgestellt habe, wird die Güte der […] thode, und die Ausdehnung, die sie in der Anwend[…] zeigt, hinreichend bestätigen. Mehrere Säße, die […] Herr D. Kramp, mit ihrer combinatorisch-ana[…] schen Behandlung, zugesendet hat, konnten hier […] Platz finden, theils, weil sie zu spät eintrafen, t[…] aber auch, weil ich diese Sammlung von Abhan[…] gen nicht über die Gebühr zu stark durfte anschw[…] lassen. Die beiden hier befindlichen Aufsätze […]

Herrn Professor Pfaff, wird man nicht ohne Nutzen mit drey andern desselben Verfassers im ersten, dritten und fünften Hefte des Archivs für reine und angewandte Mathematik vergleichen, und nicht ohne Vergnügen den Antheil bemerken, den dieser vortrefliche Analyst an der neuen Methode genommen hat, und wie tief er in den Geist derselben eingedrungen ist. Insbesondere hat Herr Professor Pfaff den großen Nutzen meiner Lokalzeichen und Formeln sehr anschaulich vorgelegt, dergestalt, daß er jedem, durch das hier und a. a. O. Beygebrachte, den Beyfall abdringen kann, welcher an dem, was in der Anmerkung zu seinem hiesigen ersten Satze von den Vortheilen dieser Zeichen und ihres Gebrauchs von ihm ist erinnert worden, noch zweifeln wollte.

Dieser so vielfache Beyfall von der einen Seite, und die aufgeworfene Frage von der andern: ob nicht die Combinationsmethode und ihre Anwendung auf die Analysis, so einfach auch die dabey zum Grunde liegenden Säze und Verfahren seyn mögen, selbst bey der ihr zugestandenen Brauchbarkeit, bey dem polynomischen sowohl als verschiedenen andern analytischen Säzzen; ob nicht die Combinationsmethode bey jenem und allen übrigen Säzen ganz entbehrlich sey? ob man nicht durch andere Verfahren das alles eben so allgemein, eben so leicht und eben so geschwind erhalten könne? und ob nicht insbesondere das hier im ersten Aufsatze vorgeschlagene, und ausführlich dargestellte, Substitutionsverfahren ein vollkommnes Surro-

man verfallen ist, so weit mir dieselben bekannt g
den sind, gründlich zu heben und gänzlich zu zers
Hier habe ich zugleich jene Frage eben so ausf
beantwortet, als sie umständlich ist vorgelegt w
und dadurch den Leser vollkommen in den Stand
durch Abwägung der Gründe und Gegengründe
zu urtheilen.

Herr Professor **Klügel** hat hin und wiede
Zeichen erklärt und gebraucht. Dasselbe hat He
fessor **Pfaff** insbesondere mit meinen Lokalzeich
Formeln gethan. Dadurch, und durch meine,
lich den beiden ersten Abhandlungen, gleich un
Text beygefügten Anmerkungen, haben die Leser
die Sache noch neu und unbekannt ist, den u
baren Vortheil, daß sie ganz unvermerkt, mit
Zeichen und Vorstellungen bekannt werden, ehe
auf meine Abhandlung kommen, die alles in
Zeichen und Formeln darstellt. Man hat

So wäre denn der scheinbaren Schwier
der Menge der Zeichen, woran man sich so
hat, vortreflich abgeholfen. Könnte ich
Quelle, woraus so viele Misverständnisse f
so leicht und eben so sicher verstopfen! Ma
lich sehr geneigt — und die selbstdenkende
mechanischcalculirende, Classe ist es, wie n
allermeisten — sobald man das Hauptm
einer Sache wahrgenommen hat, besonde
wie hier, so leicht und so ganz natürlich ist
tor nicht weiter zu verfolgen, und sich da
selbst hinzuzudenken. Das kann nu
an und für sich richtige, nicht aber immer
sache passende Vorstellungen leiten, und m
mich die Erfahrung gelehrt hat, Misverst
Misdeutungen veranlassen. Ein sehr be
wirksames Mittel dagegen, zuverlässig das E

ner Art, das aber eine große Selbstverläugnung vor- aussetzt, ist das von Rousseau anempfohlene: *En lisant chaque Auteur, je me fis une loi d'adopter et suivre toutes ses idées, sans y mêler les miennes, ni celles d'un autre, et sans jamais disputer avec lui.* (Confessions Livre VI.)

Vorerinnerung.

Das Gesetz für die Coefficienten in den Po
die größten Mathematiker beschäftiget. D
Jacob und Johann Bernoulli, Moiv
Castillon, Segner, Euler, Kästner,
und Hr. Prof. Hindenburg geleistet haben,
beysammen in der Schrift des Letztgenannten
mii dignitatum exponentis indeterminati Hy
ac Formulae. Edit. alt. Goettingae 177
lersche und vom Hrn. Kästner in ihrer Allg
wiesene Formel ist **völlig analytisch**; si
Unvollkommene, daß sie die nachfolgenden
nicht außer der Reihe, sondern jeden nur m
ihm vorhergehenden angiebt. Herr Hinden
che ganz allgemein außer ihrer Folge zu f
mittelst der **Combinationsmethode** [a]

a) Von der Combinationsmethode und ihrer Anw
Analysis, handeln, außer den im Texte ang
Dign. mein *Nov. Syst. Perm. Comb. et Variat*
Töpfers combin. Analytik, und mehrer

giebt alsdann die allgemeine Formel für die Coefficienten diese nicht analytisch an, nehmlich nicht so, daß nichts mehr als bekannte Substitutionen und die gewöhnlichen analytischen Operationen erfordert würden, um sie zu erhalten. Die Formel weiset mehr nur auf die combinatorischen Operationen hin, die man vornehmen muß, um die Coefficienten selbst herauszubringen [b]). Es muß also die Combinationsmethode dem bekannt seyn, der nach einer solchen Formel die Coefficienten herausbringen will. Nun ist diese Methode freylich auf ziemlich einfache [c]) Grundsätze und Operationen gebracht. Man könnte sie daher eben sowohl unter die analytischen Methoden aufnehmen, als das Differentiiren und Integriren [d]). Ihre Brauchbarkeit bey verschiedenen andern

vorhandene, theils im Archiv der rein. u. angew. Math. (Leipzig, bey Schäfer 1795) befindliche Aufsätze. Daselbst (Heft 4. S. 385—402) ist Moivre's und (S. 402—423) Boscovichs combinatorische Behandlung des Polynomialtheorems weiter von mir analysirt, und dargethan worden, daß, und warum, in ihren Verfahren, wenn man alles entwikkelt und gehörig benutzt, mehr liege, als die Urheber derselben gewußt, selbst nicht einmal geahndet haben.

Hindenburg.

b) Das ist eine kurze aber getreue Darstellung meines Verfahrens überhaupt genommen, die sehr gut zu der Definition paßt, die ich unlängst (Arch. der Math. H. 4. S. 423.) von der combinatorischen Analysis gegeben habe. Ein Beyspiel einer ganz vollendeten analytisch-combinatorischen Darstellung und Entwicklung, bey einer sehr zusammengesetzten Aufgabe, in meinem Programm: *Ad Serier Reuers. Paralip* (1793); Arch. der Math. H. 1. S. 17. in der Note. H.

c) Man kann vielmehr sagen: ganz einfache — da die combinatorischen Operationen (wie ich die regelmäßige Darstellung von Permutationen, Combinationen und Variationen zu nennen pflege) offenbar viel einfacher und leichter sind, als die arithmetischen, die nichts weiter als bedingte combinatorische sind. Arch. der Mathem. H. 1. S. 22. H.

d) Das wird auch gewiß geschehen, und hätte, nach Herrn Professor Pasquich's Urtheile (Unterricht in der mathem. Analys. 1 B. Vorr. S. XI.) schon längst geschehen sollen. Wie wichtig die combinatorischen Operationen, vornehmlich aber

analytischen Problemen ist auch anerkannt. Aber dennoch erfordert sie besondere, von den übrigen analytischen Operationen ganz verschiedene Arbeiten, denen man lieber entgeht, wenn sich ihnen entgehen läßt [e]). Ich habe daher geglaubt, es verlohne sich der Mühe, und es sey gewissermaßen noch eine Erweiterung der Analysis, eine andere blos analytische Formel für die Potenzen zu suchen, wobei man die Combinationsmethode nicht nöthig habe. Eine solche ist diejenige, die ich hier vorlege. Wenn man sie in ihrer ersten einfachen Gestalt nimmt, so sind gleich-

die Involutionen (Arch. d. Math. H. 1. S. 13 u. f.), und zwar recht eigentlich in analytischer Hinsicht, zu bequemer Umwandlung der Formen und schneller Darstellung ihrer Glieder, nach vorgeschriebenen Gesetzen, sind, hat Herr Prof. Klügel in der nächstfolgenden Abhandlung vortreflich gezeigt; auch stützt sich die combinatorische Form unmittelbar auf Gründe, welche die allerersten in der Analysis sind, so, daß sie ohne weitere Vorbereitung, als wegen der Bezeichnung, gefaßt werden kann. H.

e) Aus dieser Stelle und der bald darauf folgenden Aeusserung am Schlusse dieser Vorerinnerung „die Combinationsmethode „könne durch völlig analytische Verfahren (darunter hier die „bis itzt bekannten und üblichen verstanden werden, mit Aus-„schließung jener Methode, als einer noch nicht allgemein in „die Analysis an- und aufgenommenen) nicht nur bey dem po-„lynomischen, sondern auch bey andern Problemen ganz ent-„behrlich gemacht werden.“ — Aus dieser Aeußerung erhellet deutlich, daß Herr Etatsrath Tetens in den Gedanken steht, die Combinationsmethode könne nichts schaffen, was man nicht durch andere völlig analytische (in obiger Bedeutung des Worts) Verfahren eben so leicht und geschwind erhalten könne. Eine aufmerksame unpartheiische Vergleichung beider Verfahren und eine reifliche Erwägung der in der nächstfolgenden Abhandlung beygebrachten triftigen Gründe, über die Wichtigkeit combinatorischer Operationen und Involutionen in der Analysis, kann hier nur allein entscheiden. Noch muß ich erinnern, daß Herr Professor Klügel bey Abfassung seines Aufsatzes, von Herrn Tetens Abhandlung und ihrem Inhalte nichts gewußt habe, und daß folglich der Beyfall, mit welchem er sich für die Combinationsmethode und ihre Aufnahme in die Analysis erkläret, zwar an sich bedeutend, dennoch aber in Rücksicht auf jene Abhandlung ganz zufällig ist.

H.

wohl noch fernere Substitutionen [f]), oder Entwickelungen, erforderlich, wo die Coefficienten, die man sucht, aus mehreren, verschiedenen Produkten bestehen. Sie können sogar eine große Menge dergleichen enthalten. Alsdenn aber wird von diesen nur Eine Art **unmittelbar**, die übrigen in ganzen Klassen oder Geschlechtern angegeben, und um sie alle aus einander gesetzt zu haben, muß man die Klassen von neuen aus einander legen. Aber dieß letztere geschieht durch bloße analytische Substitutionen, zufolge derselben allgemeinen Formel, ohne daß eine andere Operation mit den Größen dabey nöthig werde, und die Combinationsmethode wird hiebey ganz entbehrlich. Dieß wird sie auch bey andern analytischen Problemen, wo man seine Zuflucht zu ihr genommen hat.

---

1. **Zwey Arten von Polynomien** sollen hier in Betracht kommen. Die eine von der Form

$$(a + bx + cx^2 + \ldots + qx^r + \ldots)^n \text{ oder}$$

$$(ax + bx^2 + cx^3 + \ldots + qx^r + \ldots)^n$$

, und ähnliche, worinn die Theile von einander unterschieden und durch die **Potenzen** der **veränderlichen** Größe x, und nach diesen Potenzen, geordnet werden. Die Coefficienten der Potenzen von x in der Dignität n sind die, welche angegeben werden sollen. Sie mögen aus sehr vielen Theilen bestehen; sie werden als einzelne Coefficienten angesehen. Es sey nämlich:

$$(a + bx + cx^2 + \ldots + qx^r)^n = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Qx^r,$$

so sind $A, B, C \ldots Q$ die anzugebenden Coefficienten des Polynomii.

f) Die combinatorisch-analytische Methode bedarf, wie man finden wird, dieser **fernern**, oft sehr zahlreichen, **Substitutionen** nicht; sie läßt die **combinatorische Formel**, wie sie in ihrer ersten einfachen Gestalt gegeben, oder aus der **Localformel** abgeleitet worden (unten Note k), und schaft daraus, mit Beihülfe des **Zeigers**, unmittelbar und ohne weitere Umstaltung, die Werthe ihrer Glieder nach der Reihe. H.

Die Polynomien von der Form $(ax+bx^2++qx+{}^r)^n$, die keinen Coefficienten zu x^0 haben, können leicht auf die von der andern Form $(a+bx++)^n$ zurückgebracht werden. Jene Form soll hier als allgemein für die erste Art angenommen werden.

Die zwote Art der Polynomien wird durch die Formel $(a+b+c++q)^n$ ausgedrückt. In dieser werden die Theile als verschiedene Theile angesehen, die entweder verschiedene Größen des gegebenen Polynomii, a, b, c . . q als Faktoren enthalten, oder dieselben in verschiedenen Potenzen. Die Ordnung und Folge der Theile wird bestimmt nach der Folge der Buchstaben a, b, c . . und nach den Potenzen von diesen. Z. E. a^n geht vor $a^{n-1}b$ vorher, $a^{n-1}b$ vor $a^{n-1}c$; dieß vor $a^{n-1}d$, u. s. f. Auch alle, worin a^{n-1} ein Faktor ist, vor denen, die a^{n-2} enthalten, als $a^{n-2}b^2$, $a^{n-2}bc$, u. s. f.

2. Das Polynomium $a+bx+cx^2++qx^r$, dessen Coefficienten als gegeben angesehen werden, und eben so $a+b+c++q$, soll das ursprüngliche Polynomium, die Grundreihe, (*series fundamentalis*) heißen. In dem Produkte zweyer Polynomien von der Form $(a+bx+cx^2++qx^r)^n.(\alpha+\beta x+\gamma x^2++\varkappa x_\varrho)^\nu$ sind zwey in Hinsicht ihrer Coefficienten gegebene Grundreihen.

Eben so auch in denen von der Form

$$(a+b+c++q)^{n}.(\alpha+\beta+\gamma++\varkappa)^n.$$

3. Um den terminum generalem für jeden Coefficienten eines Polynomiums $(a+bx+cx^2++)^m$ bequemer zu bezeichnen, nehme man an, daß in dem ursprünglichen Polynomium, oder in der Grundreihe (2) jedesmal so viel Theile vorhanden sind, als die Ordnungszahl (numerus termini) des Coefficienten enthält. Z. B. wenn der nte bezeichnet werden soll, das ist, der zu x^{n-1} gehö-

lichen allein, oder die angenommenen mit dazu
das zu dieser Bezeichnung gebraucht werden kann
mal gleich groß sind.

Die ersten Coefficienten des ursprünglich
nomiums $a+bx+cx^2++$, welche bestimm
ben sind, werden durch die Buchstaben a, b, c u.
zeichnet; die letztern, die man unbestimmt
soll, kann man durch den numerum termini n,
ger Veränderung, auf diese Art, $|n|$, ausdrück
ist $|n|$ der nte, $|n-1|$ der (n-1)te u. s. f.

Der *terminus generalis* der Coefficien
den nten in $(a+bx+cx^2++|n|x^{n-1}+$
also durch das Stück des ursprünglichen
nomiums bis zum nten Coefficienten
men, (diesen eingeschlossen) in der Potenz
durch ein vorgesetztes T auf folgen
bezeichnet werden: $T(a+bx++|n|x^{n}$

Diesen Ausdruck kann man abkürzen, ohn
des Bezeichnenden in ihm. Da die Potenzen v
zu jedem besondern Coefficienten gehören, deren O
zahl man weiß, sich von selbst ergeben, so kann
den obigen Ausdruck den folgenden setzen: T(a+

Und $T(b + + |n-1|)^m$ ist der so vielt
$b + cx + +$ als in $(b + + |n-1|)$ Thei

g) Solche Ausdrücke willkührlicher Coefficien
der der Potenzen der Polynomien $a + bx$
oder $b + cx + dx^2 \ldots = q$, oder $c + dx + e$
als in diesem dritten §. vorgelegt und erklä
nenne ich **Lokalausdrücke**, und die aus
gesetzten Formeln, **Lokalformeln**, weil di
mittelbar die Werthe selbst (hier der Coefficien
Fällen der Glieder) angegeben, sondern nu
nachgewiesen werden.

Um nun die *terminos generales* des Text
cienten der Potenzglieder), hier und in der
Lokalzeichen geschwind umsetzen zu können, di
gleichung:

$$T(a + + |n|)^m = p^m \varkappa n$$
$$T(a + + |n-1|)^m = p^m \varkappa (n$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$T(b + + |n|)^m = q^m \varkappa (n$$
$$T(b + + |n-1|)^m = q^m \varkappa (n -$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$T(c + + |n|)^m = r^m \varkappa (n -$$
$$T(c + + |n-1|)^m = r^m \varkappa (n -$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

u. s. w. u. s. w.

den aus dem zweyten, multiplicirt
d.i. wenn die ersten n Coefficienten au
einen Faktor mit den ersten n aus de
dern, in umgekehrter Ordnung geno
Einer von jenen mit Einem von d
multiplicirt werden.

Unter a, b, c, d, . . . : $|n-2|$, $|n-1|$,
schreibe man $|\nu|$, $|\nu-1|$, $|\nu-2|$, . . . γ, β,
unter die Coefficienten des ersten Polynomiums, d
ficienten des andern, aber umgekehrt, so ist:

$$a.|\nu| + b.|\nu-1| + c.|\nu-2| + + |n-2|.\gamma + |n-1|.\beta$$

der gesuchte (n)te Coefficient des Produkts.

wo bey mir $p^m \varkappa n$; $q^m \varkappa (n-1)$; $r^m \varkappa (n-2)$; u. s. w.
(n-1)ten, (n-2)ten... Coefficienten der zugehör
tenzen p^m, q^m, r^m... bedeuten. Für ganze Glied
che ich 7 statt $\varkappa$, so daß z. B. $r^m\, 7(n-3)$ das (n-3)te
der Potenz r^m bedeutet. *Nov. Syst. Perm.* p. XXXIII

h) Dieser Coefficient wäre, nach meiner Zeichnung,
so wie $(\pi p)\, 7n$ das nte Glied des Produkts der bey
hen π und p seyn würde (oben, Note g). Die Werth
Lokalausdrücke für zwey und mehrere Reihen, *No*
Perm. p. LXXI-LXXVI; Arch. der Math. H. 2. S.

so ist der 8te Coefficient (oder der zu x^7 ge

da alle andere Produkte Nullen sind.

Für den 5ten Coefficienten hat man

$$\begin{array}{ccccc} a, & b, & c, & d, & o \\ \varepsilon, & \delta, & \gamma, & \beta, & \alpha \\ \hline \end{array}$$
$$+a\varepsilon+b\delta+c\gamma+d\beta+o$$

5. Satz 2. Der (n)te Coef
$(a+bx+cx^2++|n.|x^{n-1})^2$ d. i. T
(§. 3.) ist gleich, der zwiefachen S
Produkte aus den beyden äußer
cienten des ursprünglichen Pol
(von a bis $|n|$ sie genommen), und
Paar zweyer gleich weit von dem
von dem letzten abstehenden, wen
Quadrat des mittelsten addirt wi
Fällen nehmlich, wo $|n|$ eine ung
ist. Das ist

$$T(a++|n|)^2 = 2.a.|n|+2.b.|n-1|+2.c.|$$

wenn g der mittelste ist, zwischen *a* und $|n|$.

Hier aber ist $T(b ++ |n-1|)^2$ der (n-2)te Coeff
dem Quadrate $(b + cx ++ |n-1|.x^{n-2})^2$.
dem ursprünglichen Polynomium hier beybehalte
nungszahl ist kleiner in dem verkürzten Polynomiu

Anmerkung. Man kann die Coefficien
$a + bx + cx^2 ++$ in ihrer Ordnung auf
Streifen Papier schreiben, und auf einen
Streifen eben dieselben in umgekehrter Ord
mit so viel Nullen vorne und hinten, als man wi
nun den (n)ten Coefficienten des Quadrats zu hal
man die Streifen so unter einander, daß unter de
auf dem Einen Stück der Erste *a* auf dem ander
gen kömmt, so ergeben sich die Produkte von selbs
aus der gesuchte Coefficient bestehet. Z. B. das u

i) Dieses mechanischen Mittels, dessen Herr T. hie
läufig Erwähnung thut, hat sich auch *Colson* (*M*
Flux. and infin. Ser.) bey Multiplikation (p. 173)
sion (p. 175) zweyer Reihen, ingleichen bey Erh
Reihen zu Potenzen (p. 175-177) bedient. Für Pr
mehrern Reihen würde jenes Verfahren gleichwoh
läufig ausfallen, und da ist ihm das ungleich gesc
combinatorische weit vorzuziehen. Man verg
in der Note h angeführten Stellen. (*Infin. Dign*

liche Polynomium sey $a+bx+cx^2+dx^3$, die Papierstreifen, jeder mit drey Nullen, seyen, wie hier steht,

A	a,	b,	c,	d,	o,	o,	o,
B	o,	o,	o,	d,	c,	b,	a,

Man kann noch mehrere Nullen zusetzen, die aber für dieses Beispiel überflüssig sind.

Um den 7ten Coefficienten in dem Quadrate zu haben, lege man unter das 7te Fach von A das erste von B, so giebt die Multiplication blos dd.

Für den 5ten legt man unter das fünfte Fach von A, das erste von B, folgendergestalt:

a, b, c, d, o, o, o,
o, o, o, d, c, b, a,

und so ist $2bd+cc$ der 5te Coefficient im Quadrate, der zu x^4 gehört.

Die Coefficienten im Quadrate werden auch ohnedieß so leicht gefunden, daß man $T(a++|n|)^2$ jedesmal als gegeben ansehen kann, ohne daß eine weitere Auflösung oder eine weitere Substitution nöthig ist.

7. Satz 3. Es ist

$$T(a++|n|)^2 = 2a.|n| + T(b++|n-1|)^2$$

d. i. jeder (n)te Coefficient des Quadrats $(a+bx+cx^2++)^2$ besteht aus einem Produkte $2a.|n|$ und aus dem Coefficienten des um den Theil *a* verkürzten und durch x dividirten ursprünglichen Polynomiums, nemlich $(b+cx+dx^2++)^2$. Der numerus termini dieses letzten Coefficienten ist so groß, als die Zahl der Coefficienten $b+c++|n-1|$, das ist denn hier in dem

$T(a + + |n|)^m = a^m$, wenn $|n|$ selbst der erste … nus *a* seyn soll. Eben so ist $T(b + + |n-1|)^m$ = … wenn $|n-1| = b$.

Anmerkung. Auch ist der zweyte Coeffic… $(a + bx + cx^2 + +)^m$ oder $T(a + + |n|)^m$, der zu… hört, jedesmal $m a^{m-1} b$, wie schon aus der formul… mii klar ist. Dasselbige wird sich unten auch zeige… eine Folge aus der Polynomialformel.

8. Satz 4. Der allgemeine Ausdru… jeden (n)ten Coefficienten in dem Po… mium $(a + bx + cx^2 + +)^m$ ist folgender:

k) Herr Etatsrath Tetens ist bey der (in der Voreri… S. 3. versprochenen) weitern Analysis des nten Coef… [ϰn] seiner *formulae polynomialis* unvermerkt auf … Lokalformel verfallen, die ich für das nte Glied [7… selben (*Infin. Dign. p.* 71, 3.) bereits gefunden und (*N…* *Perm. p.* LI. *Ex.* I. nach einer verbesserten Zeichnung) … gen habe. Man vergleiche Toepf. combin. Anal. … 163.

Wenn man nehmlich in der dortigen Formel (S. 16… sich auf 1 + p (nicht wie hier auf a + p) bezieht,

anstatt	1 + p	7	p	n	$\mathfrak{N}$
hier setzt	a + q	ϰ	q	n-1	$\mathfrak{M}$

mit der, S. 163 befindlichen, übereinstimmend,
p, n+1 statt der hiesigen a, q, n, stehen. S
statt meiner Lokalausdrücke $q^1 \varkappa (n-1)$, $q^2 \varkappa (n-2)$
stehender Formel, die gleichgültigen Tetenschen
und statt meiner Binomialcoefficiente

$^m\mathfrak{M}$ (*Nov. Syst. Perm. p.* XL, 9.) ihre Werth

$\frac{m \,.\, m-1 \ldots . m-(m-1)}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\,.\,.\, m}$, so erhält man

kommen so, wie sie hier im Texte steht.

Um nun daraus den nten Coefficienten zu
Herr Tetens mehrere einander ähnliche S
ihre Glieder, wie aus den Vorschriften §. 9. u
Exempeln 1, 2, 3, und dem Exempel §. 11 erh
gen bediene mich, statt obiger Lokalformel, da
gen combinatorischen, nach dem von
Perm. p. LI) aufgestellten Relationen d
combinatorischen Zeichen, und so komm

$$(a+q)^m \varkappa\, n = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} a^{n-1} A + {}^m\mathfrak{B}$$
$$+ {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3} c^{n-1} C. \ldots + {}^m\mathfrak{M}\, a^0$$

für den Zeiger $\begin{pmatrix} b & c & d & e & f & g & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \end{pmatrix}$

woraus sich jeder verlangte Coefficient mit g
keit entwickeln läßt. *Infin. Dign. p* 102,
p. 167.

Nicht also die Grundformel, sondern
anzuwenden, ist bey beyden Verfahren versch

Der Beweis des Satzes soll unten (§. 14, 15, 16) folgen. Die Formel gilt für alle Exponenten, für ganze positive (§. 14, 15), für gebrochene und verneinte (§. 16), so allgemein als die Binomialformel.

9. Anmerkung 1. Die Formel giebt nur den ersten Theil des gesuchten Coefficienten unmittelbar und völlig entwickelt, nehmlich das Produkt $m a^{m-1} |n|$. Die übrigen sind wiederum *termini generales*, nehmlich:

für den (n-2)ten Coefficienten in $(b + cx + dx^2 + +)^2$
für den (n-3)ten Coefficienten in $(b + cx + dx^2 + +)^3$
und so weiter
für den (n-m)ten Coefficienten in $(b + cx + dx^2 + +)^m$.

Anmerkung 2. Die Formel bricht ab, wenn $a^{m-m} = a^0 = 1$; und das geschieht für ganze positive Exponenten.

Aber sie bricht auch ab, wenn der numerus termini *n* ein solcher ist, daß entweder $|n|$, oder $|n-1|$ oder $|n-2|$ oder $+ |n-(m-1)|$ aus dem ursprünglichen Polynomium mit b zusammen fällt. Denn da $b + cx + dx^2 + +$ von *b* anfängt, so sind die vor b vorhergehenden Glieder Nullen. Wenn das (n-[m-1])te Glied in dem ursprünglichen Polynomium $a + bx + cx^2 + +$ das Erste, nemlich *a* seyn sollte, so ist dieß Null in dem abgekürzten Polynomium.

Hieraus folgt dann, daß jedesmal der 2te Coefficient, oder der zu x^1 gehörige, $m a^{m-1} . b$ sey. Denn hier

gleichwohl die hier im Texte angewiesene Entwickelung der Coefficienten aus der Formel schon vorher bekannt gewesen, erhellet aus den (*Nov. Syst. Perm.* p. LV, 9, 10 und Ex. 11.) von mir aufgeführten Relationen, von denen jene Entwickelung nur eine fortgesetzte mehrmal wiederholte Anwendung ist. Warum ich sie nicht gewählt habe, wird die vergleichende Zusammenstellung beyder Verfahren in der Folge zeigen.

H.

1.2 1.2.3

Nun ist $T(b+c)^2 = 2.b.c$; $T(b)^3 =$ b…
$T(a+++d)^5 = 5.a^4 d + 10.2.a^3.b.c +$ …

Exempel 2. Es sey $m = 5$; $n = 5$; …
$|n| = e$; $|n-1| = d$; $|n-2| = c$. u. s. f. Und …

$$T(a+++e)^5 = 5.a^4 e + \frac{5\cdot 4}{1.2} a^3. T(b++d)^2 + \ldots$$

$$T(b+c)^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} a. T(b)^4.$$

Nun ist $T(b++d)^2 = 2bd + T(c)^2 =$ 2…
Auch $T(b+c)^3 = 3.b^2.c$. Das übrige fäll…

Und $T.(b)^4 = b^4$.

Folglich $T(a+++e)^5 = 5.a^4.e + 10.a^3(2$b…
$+ 10.3.a^2.b^2.c + 5.a.b^4$.

Exempel 3. Es sey $m = 5$; $n =$ …
sechs ersten Coefficienten in dem ursprüngl…
lynomium sind a, b, c, d, e, f, worunter auch N…
können. Also ist $|n| = f$; $|n-1| = e$, u. s. w.

10. Anmerkung 4. Wenn man die For

$$T(a++|n|)^m = m a.^{m-1}|n| + \frac{m.m-1}{1.\ 2} a.^{m-2} T(|b+$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3}.\ T(b++|n-2|)^3 ++$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots m-(m-1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ \ m} a^{m-m} T(b++|n-$$

genau ansieht, so zeigt sich:

a) daß die Zahl-Coefficienten der Theile d in welche der gesuchte (n)te Coefficient des Pol $(a+bx+cx^2++)^m$ zerlegt wird, die Bi Coefficienten sind. Die formula polynom Hinsicht der Zahl-Coefficienten dieser Theile di binomialis.

b) daß alle Theile dieser Coefficienten, w als ein Factor vorkommt, auf einmal zusamme werden. Es sind ihrer jedesmal *m*.

c) die übrigen Theile werden zwar gleic nicht einzeln sondern nur nach ihren Cl geben. In dem zweiten Stücke sind alle einzeln begriffen, in denen a^{m-2} ein Factor ist; in dem

Es sind nemlich $\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}$ Product

ein Factor ist. Zu dieser Classe geh

$T(b++|n-2|)^3$ enthaltenen Producte.

Es ist aber nach der Formel

$$T(b++|n-2|)^3 = 3b^2.|n-2|+\frac{3.2}{1.2}b.T(c++|n-3|)^2$$

l) Diese heterogenen Theile oder Producte
Herr T. durch successive Substitutionen in die
kalformel (§. 8), wobey nicht selten Subst
Substitutionen (wie im Exempel §. 11)
Verwickelung führen, so leicht sie auch an sich
stitutionen vermeide ich durch meine ganz simple
wickelung der Combinationsclassen n-1A
(*Insin. Dign.* p. 75-76) deren sämtlich gut ge
plexionen (*Nov. Syst. Perm.* p. IX. 25) mit
zungszahlen a, b, c... (Ebend. IX, 24 u.
aus einer Tafel (*Insin. Dign.* p. 167. oder *N*
p. LIX) sich ausschreiben lassen. Noch ist z
diese heterogenen Theile, wie sie im Texte g
nach der Combinationsmethode genau in e
nung und Folge auf einander, wie nach
tionsverfahren, gefunden werden. H.

B

Wenn man auf den Theil kommt, wo *a* als ausgeht, so übersieht man gleich wie die noch f Theile auf einander folgen. Die Folge ist diesell für ein anderes ursprüngliches Polynomium, da anfängt, und wobey man für den numerus nimmt $n-m$.

e) Man kann diese Theile der Formel außer nung entwickeln, worin sie in der Formel stehen. kömmt bey der Entwickelung der einen Classe niem ein einzelnes Product, was in der andern Classe fi fände.

f) Wenn alle Substitutionen gemacht sind der Ausdruck für den gesuchten Coefficienten gan braisch.

11. Anmerkung 5. Wenn der numerus n groß ist, so sind viele Substitutionen erforder man auf die einzelnen Producte kommt. Allein, w ihrer auch nöthig sind, so zeigt doch die Art des rens, daß es keine kürzere Methode die einzelnen heterogenen Theile, un

den aus ihnen bestehenden Coefficienten zu finden, als die, welche die Formel anweiset. Denn sie erfordert nicht mehrere einfache Operationen, welche hier in Multiplicationen bestehen, als es selbst heterogene Producte giebt, deren jedes, wenn man sie nemlich abgesondert von einander haben will, seine eigne Multiplication nothwendig macht. Alle die, welche homogen sind, werden auf einmal mit ihrer ganzen Summe angegeben. Ist also hier die Arbeit weitläuftig, so liegt es an der Sache: materia longa est m).

Wenn der 12te Coefficient in der vierten Potenz von $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6+hx^7+ix^8+kx^9$ gesucht wird, der auf die gewöhnliche Weise berechnet, aus 53 Theilen besteht, die aber nicht alle heterogen sind, so hat man $n=12$, aber $|n|=0$, $|n-1|=0$; (weil nur zehn Glieder in dem ursprünglichen Polynomium sind) ferner $|n-2|=k$; $|n-3|=i$, u. s. f.

Nun ist:

$$T(a++|n|)^4 = 4.a^3.|n| + \frac{4.3}{1.2}a^2.T(b++|n-1|)^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}a.T(b++|n-2|)^3 + T(b++|n-3|)^4$$

Aber 1) $a^3.|n|=0$.

2) $T(b++|n-1|)^2 = 2.b.|n-1| + 2.c.|n-2| ++ = 0 + 2.c.k + 2.d.i. + 2.e.h + 2.f.g$

m) Sehr wahr! denn wenn ein Ganzes viele Theile hat, die alle da seyn müssen, so muß man, sie aufzufinden, wenigstens so viel Zeit dazu haben, als nöthig ist, sie zu schreiben. Ob nun aber Herrn Tetens Substitutionsmethode (wie gleich zu Anfange dieses Paragraphs behauptet wird) oder mein Combinationsverfahren (wie theils die unmittelbare Vergleichung, theils mehrere Versuche mich gelehrt haben) in der Anwendung leichter und kürzer sey, bleibt billig der eigenen Prüfung jedes einzelnen Lesers, der hierüber urtheilen will und kann, selbst überlassen. Mehr Aufschluß hierüber in meiner Abhandlung, weiter unten. H.

$+ (3.c^2.h + 3.c.(2.d.g + 2$

$+ 3.d^2.f + 3.d.e^2$

$4)\ T(b ++ |n-3|)^4 = T(b ++ i)$

$$+ \frac{4.3}{1.2} b^2.T(c ++ h)^2$$

$$+ \frac{4.3.2}{1.2.3} b.T(c ++ g)^3 +$$

Aber $T(c ++ g)^3 = 3.c^2.g + \frac{3.2}{1.2} c.T(d-$

$$+ T(d ++ e)^3 (= 3.d^2 e)$$

Und $T(c ++ f)^4 = 4.c^3.f + \frac{4.3}{1.2} c^2.T(d-$

$$+ \frac{4.3.2}{1.2.3} c.T(d)^3.$$

Folglich, diese Substitutionen gemacht

$T(a ++ |n|)^4 = 4.a^3.o + \frac{4.3}{1.2} a.^2 2(b.o + c.k +$

$$+ \frac{4.3.2}{1.2.3} a. \begin{cases} 3.b(b.k + 2.c.i + 2.d.h- \\ + 3.c.(c.h + 2.d.g + \\ + 3d(d.f + e.e) \end{cases}$$

folgen.

12. Anmerkung 6. Die Menge der heterogenen Theile in den Coefficienten hängt theil meisten, von der Ordnungszahl der letztern ab, dem Exponenten der Potenz, wozu der Coefficien soll; dieß letztere aber nur bis dahin, daß $m = n - 1$ ist. Denn wenn der Exponent der groß ist, so mag er von nun an immer größer Zahl-Coefficienten der einzelnen heterogenen The dadurch verändert, aber ihre Menge, in so fern gen sind, wird nicht vergrößert.

Z. B. Ist $n = 4$, so ist der vierte Coeffic dritten Potenz, in $(a + bx + +)^3 = 3.\, a^2.$ c $+ 3.a.T(b + + c)^2 + T(b)^3 = 3.a^2.d + 3.2.$
Der vierte Coefficient in der 5ten Potenz ist

$$5.a^4 d + \frac{5.4}{1.2} a^3. T(b + + c)^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3} a^2.$$
$$= 5.a^4.d + 20.a^3.b.c + 10.a^2.b^3$$

Dieß zeigt sich unmittelbar aus der Betrachtung de

und für den dritten

$$m. a.^{m-1} b + \frac{m. m-1}{1. 2} a^{m-2}. b^2$$

Anmerkung 7. Wenn $n = m + 1$, letzte Theil jedesmal b^m.

Ist $n = 2m + 1$, so erhält man bey der Er des Theils $T(b + + |n-m+1|)^m$ wiederum Theil $T(c + + |n-2m+2|)^m$. Dieß wi $T(c + + |3|)^m$ das ist c^m.

Anmerkung 8. Wenn $n > 2m + 1$, und allen aus c^m folgenden Producten, *b* nich Factor; wie a, nach dem obigen, ausgieng als b^m und den darauf folgenden Producten.

Anmerkung 9. Die Menge der Producte in einem Coefficienten des Quadrats is den numerus termini des Coefficienten genomm ungerade, $2r + 1$, so muß für $\frac{1}{2}$ noch ein Pro und zwar ein Quadrat gerechnet werden. Dag einige aus, wenn unter den angenommenen *n* C des ursprünglichen Polynomiums sich Nullen b

Diese letzterwähnte Correction beobachtet, so giebt es in dem nten Coefficienten der 3ten Potenz $\frac{n}{2}.\frac{n+3}{2.\ 3}$ heterogene Producte. Dieß giebt für $n=2$ nur $\frac{5}{6}$. Aber dieser Bruch ist hier ebenfalls für ein Ganzes anzusehen.

Wenn der (n)te Coefficient der (m)ten Potenz zergliedert wird, so sind in demselben $\frac{n}{m}$ Coefficienten, die zu Potenzen gehören, deren Exponent $m-1$ ist, und die weiter entwickelt werden müssen. Sie gehören zwar nicht zu der (m-1)ten Potenz des ursprünglichen Polynomiums selbst, sondern zu den Potenzen abgekürzter Polynomien, die aus jenem ihre Coefficienten haben, aber weniger davon enthalten. Und dann giebt es in denselben (n)ten Coefficienten der (m)ten Potenz $\frac{n\ (n+m)}{2\ (m-1)\ m}$ Coefficienten, die zu den (m-2)ten Potenzen gehören.

Wie viel darinnen sind aus noch niedrigern Potenzen, und so herunter bis auf die einzelnen heterogenen Producte, im allgemeinen zu bestimmen, das hieße so viel, als die Zahl der Substitutionen zu bestimmen, die zur gänzlichen Entwickelung erfordert werden. Der allgemeine Ausdruck für jene Anzahl würde sehr zusammengesetzt und verwickelt seyn. [n])

Für die aus der (m-3)ten Potenz ist sie nicht völlig $\frac{1}{2.3}\left(\frac{n.\ (n+m-1)\ (n+m)}{m-2.\ m-1.\ m}\right)$ Es wird vorausgesetzt, daß n größer sey als m.

n) Es läßt sich gleichwohl eine Formel dafür angeben, ohne eben zu sehr verwickelt zu seyn. Die Schwierigkeit der Sache im Allgemeinen zu übersehen, will ich hier nur auf das verweisen, was ich davon (Arch. der Math. H. 4. S. 412, 413) beygebracht habe. H.

$$\overline{\qquad\qquad 1.2}$$

$$+ \frac{4.3.2}{1.2.3} a T(b + + c)^3 + T(b + \ldots$$

Das erste Stück ist $4 \cdot a^3 e$, das zweite enthält T(b
$= 2. b. d + c^2$, und ist $= 0$; das dritte T(b
$= 3 b^2 c = 0$; das vierte ist b^4; bleiben also
und letzte nur allein übrig.

Zusatz 2. Das ursprüngliche Polynomiu

$$\alpha + \beta x^r + \gamma x^s + \delta x^t + + \ldots$$

Nun suche man die arithmetische Reihe, worin
nenten der Potenzen von x, nemlich r, s, t vorkom
durch bekannte Methoden möglich ist, wenn die
ten rationelle Zahlen sind; und in dieser arit
Reihe sey die Differenz d. Alsdann kann statt
benen Polynomiums ein anderes gebraucht w
der Form:

$$a + b x^d + c x^{2d} + + \beta x^r + + \gamma x^s + + \delta x^t \ldots$$

o) Ich lege daher gleich anfangs nicht die einfachste R
+ $cx^2 \ldots$ (wie hier §. 2. 3.) sondern die am allgem
gedrückte $a x^{\mu} + b x^{\mu + \delta} + c x^{\mu + 2\delta} \ldots$ für jede W
und δ, zum Grunde. Von den Vortheilen einer

$+b)^4$

$++d)^3$

$++c)^3$

das erste

m sey

die Expo-

mmen, wie

Exponen-

hmetischen

des gege-

erden von

$++0)$.

eihe $a+bx$

einsten aus-

Werthe von μ

solchen An-

$+ g x^{7/4} + \gamma x^2 + \delta x^{9/4} + l x^{10/4} + m x^1$

wo alle Coëfficienten außer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, Nullen s

Es ist also $m=4, n=13$; $|n|=0$; $|n-1|=$n

Folglich $T(a++|n|)^4 = 4a^3|n| + \frac{4 \cdot 3}{1.2} a^2 T($

$+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1.2.3} a T(b++|n-2|)^3 + T(b+$

der letzte Theil $T(b++|n-3|)^4$ weiter entr

lauter Theile, in denen b ein Factor ist, die a

nahme, Toepf. comb. Anal. Vorr. S. x
S. 162, 189. Auch ist mein Combinationsverfah
Fällen, wo Nullen (wie hier im Exempel des
den Coefficienten der gegebenen Reihe vorkomm
die Zahlen im Zeiger nicht nach der Ordnung son
weise fortgehen, sehr kurz und bequem. So
z. B. für das hier im Texte ausgeführte Exempel
nur das einzige Glied $\frac{4 \cdot 3}{1.2} \alpha^2 \beta^2 x^3$ kommen könne,
12, aus den Zahlen 6, 8, 9 die sich hier auf β,
(denn auf diesen vier Zahlen beruht einzig die
was für ein Coefficient zu $x^{12/4}$ oder x^3 zu setzen s
lein aus 6 + 6 zusammensetzen läßt. H.

$\frac{4.3}{1.2}a^2. T(b++|n-1|)^2 = \frac{4.3}{1.2}a^2(2bm+2c$

$+2e\gamma+2fg+\beta^2) = \frac{4.3}{1.2}a^2.\beta^2.$ Alles a

Null.

14. Beweis für die allgemeine For

I.) Für die zweite Potenz ist, zufolge de
ten Satzes §. 5 und des Zusatzes 2 §. 6.

$T(a++|n|)^2 = 2a|n| + T(b++|n-1|)^2$

$T(a++|n-1|)^2 = 2a.|n-1| + T(b++|n-$

II.) Die Formel ist auch richtig für die dri
tenz.

Es ist nemlich

$T(a++|n|)^3 = 3.a^2.|n| + \frac{3.2}{1.2}a.T(b++$

$+T(b++|n-2|)^3.$

Dies zeigt sich durch Folgendes:

1) Es sey $(a+bx+cx^2++)^2 = A+B$

$++|N-II|x^{n-2}+|N-I|x^{n-1}+|N|x^n$

dere ist

nel

ß zwei-

$|)^2$
tte Po-

$|n-1|)^2$

$+Cx^2$

x^{n-1} gehört in $(a+bx+cx^2++)^3$, oder
$+Cx^2++)(a+bx+cx^2++)$, das ist,
$=a.|N|+b.|N-I|+c.|N-II|++|n-2|C+|$
$=aT(a++|n|)^2=2a^2|n|+aT(b-$
$+bT(a++|n-1|)^2=2.a.|n-1|b+b.T($
$+cT(a++|n-2|)^2=2.a.|n-2|c+cT($
$+++|n-2|C=|n-2|T(a++c)^2=$
$+|n-2|T(b++$

p) An der Stelle der römischen Zahlen I, II, III
anstatt $|N|$, $|N\text{-}I|$, $|N\text{-}II|$, $|N\text{-}III|$ u
setze ich $\mathcal{N}$, $\overset{-1}{\mathcal{N}}$, $\overset{-2}{\mathcal{N}}$, $\overset{-3}{\mathcal{N}}$ u
Nehmlich, die nten, $(n\pm 1)$ten, $(n\pm 2)$ten .
Coefficienten (Glieder, Classen, Werthe etc.)
diene ich mich der Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, .., \pm$
Distanzexponenten über die Zeichen die
Von den Vortheilen solcher Exponenten, mit d
mit andern Exponenten, rechnen kann, mein N
p. XXXVII-XXXIX, LXV, LXVI; Toepf. con
164-166. Meine Distanzexponenten verwandeln
führliche Bezeichnungen, wie hier und da vorko
senschaftliche. Arch. der Math. H. 1.
Anm. H.

abgekürzten und dividirten ursprünglichen Polyno
das ist n-2 nach §. 5.

5) Die übrigen Theile (in 3.) nemlich $b\,T(b++$
$+ c\,T(b++|n-3|)^2 ++ |n-2|\,T(b++b)$
Producte die herauskommen, wenn man die Coeffi
in $(b + cx + dx^2 ++ |n-2|\,x^{n-3})^2$ mit de
$(b + cx + dx^2 ++ |n-2|\,x^{n-3})$ in umgekehrte
nung genommen, einzeln mit einzeln multiplicirt.
geben also den Coefficienten in $(b + cx + dx^2 ++ |n-2|$
oder $T(b++|n-2|)^3$

6) Demnach

$$T(a++|n|)^3 = 3.\,a^2.\,|n| + 3.a.\,T(b++$$
$$+ T(b++|n-2|)^3$$

Das ist: die Formel

$$T(a++|n|)^m = m.a^{m-1}|n| + \frac{m.m-1}{1.\;2}\,a^{m-2}.\,T(b++$$

$$+ \frac{m.\,m-1\,.\,m-2}{1.\;2.\;3}\,a^{m-3}.\,T(b++|n-2|)^3 +$$

$+ T(b++|n-m+1|)^m$ ist richtig, wen
$m = 2$, und wenn $m = 3$ ist.

schlossen) multiplicirt.

2) Wenn auf ähnliche Art die
$T(b++|n-1|)^m$, $T(b++|n-2|)^m ++$
mit a, b,
jeder obenstehende mit dem darunter gesetzt
wird, so ist die Summe solcher Producte
$= aT(b++|n-1|)^m + T(b++|n-$

Die Zahl der Coefficienten in $(b++$
Nun diese mit denen aus dem ursprünglichen
$(a+bx++|n-2|)$ verbunden, so komm
letzte von diesen unter dem ersten von jene

3) In der allgemeinen Formel geht
für $T(a++|n|)^m$, nemlich $m a^{m-1}|n|$ nac
allemal über in a^m, wenn $|n|$ mit *a* zusammen
fallen die übrigen Theile von selbst weg.

4) Dieser erste Theil $m a^{m-1}|n|$ in
$T(a++|n|)^m$ wird für die vorhergehend
$m a^{m-1}|n-1|$; $m a^{m-1}|n-2|$ u. s. f.

$+ + T(b + + |n-(m-1)|)$ wo P und Q ein... nächst auf einander folgende Binomial-C... ficienten der (m)ten Potenz sind.

Nun giebt
$aT(a++|n|)^m + bT(a++|n-1|)^m ++ |n-1| T(a+...$
$+ |n| a^m$ den Coefficienten $T(a++|n-1|)^{m+1}$.

6) Man kann also die Theile, woraus der C... cient $T(a++|n|)^m$ besteht, erst jeden für sich, so... ändern, wie solche in den vorhergehenden Coeffici... von dem (n)ten, nemlich in dem (n-1)ten; den (n-... u. s. f. bis auf den ersten zurück, enthalten sind, ... dann in ihrer Ordnung mit a, b, c, . . . diese so v... derte einzelne Theile in umgekehrter Folge multipli... Wenn dieß mit allen Theilen in $T(a++|n|)^m$ nach... nach geschieht, so bekömmt man $T(a++|n|)^{m+1}$.

7) Der erste Theil in $T(a++|n|)^m$ ist $m a^{m...}$ So giebt $m a^{m-1}|n|$, $m . a^{m-1} |n-1|$ . . . $m a^{m-1} b$, a... mit a, b, . . . |n-1|, |... wie vorher $(m+1)a^m |n| + m . a^{m-1} T(b++|n...$ (nach 4.)

Das ist, wenn m die nächsthöhere Potenz i
für $m+1$ gesetzt wird m,

$$m.a^{m-1}|n| + \frac{m.m-1}{1.2}\ a^{m-2}\ \ T(b++|n-1|)^2$$

$$+ \frac{m.m-1}{1.2}\ \ T(b++|n-2|)^3.$$

8) Ueberhaupt nehme man den Theil des
cienten $P a^{m-h}.\ T(b++|n-(h-1)|)^h$ (nach n. 5.
wie solcher in allen vorhergehenden Coefficient
halten ist, und multiplicire dann auf dieselbe
vorhin

$P.T(b++|n-(h-1)|)^h$; $P.T(b++|n-h|)^h$; ... $P.T($

mit a, b, ...

so bekömmt man nach (n. 2.)

$P.a\,T(b++|n-(h-1)|)^h + P.T(b++|n-h|$

Und $Q.T(b++|n-h|)^{h+1}$ geht über in

$Q.a.T(b++|n-h|)^{h+1} + Q.T(b++|n-h-1|)^{h}$

für die (m)te Potenz, nemlich
$Q . a^{m-h-1} T(b++|n-h|)^{h+1}$ ein andrer,
$(P+Q) a^{m-h} T(b++|n-h|)^{h+1}$

Dieser letztere Theil ist der vorige multip
a und einem Zahlen-Coefficienten, der die
ist von zweyen nächst auf einander
den Binomial-Coefficienten, und
demjenigen, den dieser Theil selb
(m)ten Potenz schon hat, Q, und den
dem nächstvorhergehenden gehört.

Nun ist, nach den bekannten Gesetzen der
Coefficienten, P+Q der Coefficient desselben
der (m+1)ten Potenz, der in der (m)ten Po
und dessen nächst vorhergehender P ist.

Folglich gilt die Formel, welche für die
tenz richtig ist, auch für die (m+1)te. Denn
m gesetzt wird m+1, so wird jeder Theil mit
cirt, und jedes Theils Zahlen-Coefficient wi
Binomial-Coefficienten der (m+1)ten Potenz
ben Theil umgeändert.

$$y^2 = x^2 (b + c x + + |n-2|. x^{n-4} + |n-1|. x^{n-}$$
$$y^3 = x^3 (b + c x + + |n-2|. x^{n-4} + +)^3$$
$$y^m = x^m (b + c x + + |n-(m-1)| x^{n-m-1} + +)^m$$

2) Es ist auch

$$(a + b x + c x^2 + +)^m = a^m + m. a^{m-1} y +$$

$$a^{m-2} y^2 + \frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3} y^3 + +$$

Dieß letzte nach der Binomial-Formel, und auc
gative und gebrochene *m*.

3) Und in jedem Fall, wo die letzte Gl
(n. 2.) gilt, ist der (n)te Coefficient, das ist,
cient zu x^{n-1} in $(a + y)^m$, oder in $(a + b x + c x$
die Summe aller Coefficienten zu x^{n-1}, die in m
$\frac{m.\ m-1}{1\ \ 2}$ $a^{m-2} y^2$ u. s. f. enthalten sind, d. i. in
tenz von y, wie y^h, multiplicirt mit dem dazu
Binomial-Coefficienten, und mit a^{m-h}.

5) Folglich der Coefficient zu x^{n-1} in $(a+y$
in $(a+bx+cx^2++)^m$, oder $T(a++|n|)^m = n$

$+ \frac{m.\ m-1}{1.\ 2} a.^{m-2} T(b++|n-1|)^2 ++ T(b++|n-($

17. Satz 6. Es sey $P = a + bx + cx^2 ++ |$
$+ |n-1|.x^{n-2} + |n|.x^{n-1} ++$
und $Q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 ++ |\nu-2| x^{n-3} + |\nu$
$+ |\nu|.x^{n-1} ++$

(Hier ist *n* als die Ordnungszahl des (n)ten Coe
$|n|$, einerley mit ν, aber die Coefficienten $|n|$ und
sind verschieden.)

Der (n)te Coefficient in $P.^m Q^h$ we
zeichnet mit $T(a++|n|).^m (\alpha++|\nu|)^h$
auf eine ähnliche Art sey $T(b++$
$(\alpha++|\nu-1|)^h$ der (n-2)te Coefficient
Produkte

$(b+cx+dx^2++)^m (\beta+\gamma x+\delta x^2+$

so ist die allgemeine Formel für die
cienten in dem Produkte $P^m. Q^h$ folge

$$+\frac{m.\,h.\,h-1}{1.\,1.\,2}a^{m-1}.\,\alpha^{h-2}\,T(b++|n-2|)\,(\beta++|\nu-$$

$$+++\ q)$$

q) Der allgemein hier ausgedruckte Coefficient T(a††
(α††|ν|)^h der Formel im Texte, ist mein ($P^m\ Q^h$)ϰn
Note g, h). Eine andere (combinatorische, in mein
kalzeichen ausgedrückte) Analysis dieses Coefficienten, h
M. Rothe (Arch. der Math. H. 2. S. 220; 223) ge
Die combinatorische Anordnung gewährt, außer der Le
keit, mit welcher nach ihr die Glieder sich entwickeln
auch noch den Vortheil, daß sie die deutlichsten Vorsch
giebt, welche Stücke der Formel zusammengehören, u
sie als Theile eines Ganzen auf einander folgen. (Von
wichtigen Nutzen der local- und combinatorischen For
Toepf. comb. Anal. S. 125, 126, 160; meine *Par*
Serier Reuers. p. XXIII.) Wie nöthig das sey, wird man
an der Formel im Texte gewahr, wo doch nur das P
zweyer Potenzen P^m und Q^h vorkommt. Welche V
kelung würde nicht bey dem Produkte mehrerer Po
entstehen! Eine allgemeine Auflösung für jede gegeben
zahl von Potenzen der Reihen enthält mein allgemeines
duktenproblem (Arch. der Mathem. H. 2. S. 224 22
die so außerordentliche Mannichfaltigkeit der vorkomm
einzelnen Potenzglieder und Coefficienten, wie und mit n
Auswahl zusammengenommen sie die einzelnen Theile d
suchten Coefficienten, oder Gliedes des Produkts, bestim
in einer leichten combinatorischen Formel zusammengef
Statt solcher Formeln werden hier die im nachstehende

$$\frac{}{1.\ 2}$$

$$+\frac{m.\ h}{1.\ 1}a^{m-1}\,\alpha$$

$$+\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}\,\alpha^{h}\,y^{3}$$

$$+\frac{h.\ h-1.\ h-2}{1.\ 2.\ 3}a^{m}\,\alpha^{h-3}.\ z^{3}$$

$$+\frac{m.\ m-1.\ h}{1.\ 2.\ 1}a^{m-2}\,\alpha^{h-1}\,y^{2}$$

$$+\frac{m.\ h.\ h-1}{1.\ 1.\ 2}a^{m-1}\,\alpha^{h-2}\,y\,z^{2}$$

Hier ist das Gesetz des Fortgangs kla
nomial-Formel, wenn man das ganze Pro
nach den Potenzen von a und α und von y u
zerlegt, so, daß als zu Einem und demselben
angesehen wird, alles, worinn die Summe
ten von a und α, und von y und z, dies

weise, so wie im §. 18, vorkommenden wört
weisungen gebraucht, die aber die Bequem
einfachen Formel bey weitem nicht erreichen,
chen können. H.

Faktores $a^{m-1}.\alpha^h$; $a^m.\alpha^{h-1}$; und $a^{m-2}\alpha^h$; $a^{m-1}.\alpha^{h-1}$; $a^m.\alpha^{h-2}$; u. s. f. charakterisiren also die Theile.

Die Exponenten Summe für die Potenzen von a und α nimmt mit jedem folgenden Theile ab, da hingegen die Exponenten-Summe für die Potenzen von y und z zunimmt. Beyde Summen zusammen sind überall $m+h$. Ist also die Exponenten-Summe von a, und α, irgendwo $m+h-n$, so ist die Exponenten-Summe von x und y, ebendaselbst n.

2. Der (n)te Coefficient, oder der zu x^{n-1} in $P.^m Q^h$ (den ersten zu x^0 aus der Acht gelassen, der für sich $a.^m \alpha^h$ ist,) wird also erhalten, wenn die Coefficienten zu x^{n-1} in y, z; y^2, z^2; y^3; $y^2 z$, $y z^2$, z^3 und so ferner, zusammen genommen werden, jeder in den dazu gehörenden Faktor multiplicirt. Diese Faktoren sind die dazu gehörenden Potenzen von a und α, und die Produkte der zu diesen letzteren wiederum gehörenden Binomial-Coefficienten.

3) Da also der zu x^{n-1} gehörige Coefficient in $y = bx + cx^2 + dx^3 + + |n| x^{n-1}$ ist $|n|$, und der zu x^{n-1} gehörige in $z = \beta x + \gamma x^2 + + |\nu| x^{n-1}$ ist $|\nu|$, so erhält man für den ersten Theil des gesuchten Coefficienten, $m.a^{m-1}.\alpha^h |n| + h.a.^m \alpha^{h-1} |\nu|$.

4) In $y^2 = (bx + cx^2 + + |n-2| x^{n-3} + |n-1|.x^{n-2} + |n|.x^{n-1})^2 = x^2(b + cx + + |n-2| x^{n-4} + |n-1| x^{n-3} + +)^2$ ist der Coefficient zu x^{n-1}, $T(b + . + |n-1|)^2$

Und in $z^2 = x^2(\beta + \gamma x + + |\nu-2|.x^{n-4} + + |\nu-1| x^{n-3} + +)^2$ ist selbiger $T(\beta + + |\nu-1|)^2$

Und in

$yz = x^2(b + cx + + |n-2|.x^{n-4} + |n-1| x^{n-3} + +)(\beta + \gamma x + + |\nu-1| x^{n-3})$ ist selbiger $T(b + + |n-1|)(\beta + + |\nu-1|)$

5) Auf eine ähnliche Art ist der zu x^{n-1} gehörige Coefficient in y^3, $T(b + + |n-2|)^3$; in z^3, $T(\beta + + |\nu-2|)^3$

Diese Exponenten-Summe ist in dem
zu x^0, $m+h$. Sie ist in dem ersten Theile in
des §. 17, $m+h-1$, und so ferner in jedem
den Theile jedesmal um Eins kleiner. Z. B.
ten Theile $m+h-4$.

2) Dieß giebt die verschiedenen Produ
Potenzen von a und α, die zu diesen Theilen
ren Verschiedenheit wiederum die Unterarten
abtheilungen macht. Z. B. für den 4ten The
§. 17, wo die Summe der Exponenten von
$m+h-4$, hat man folgende Abtheilungen

$$a^{m-4}.\quad \alpha^{h}$$
$$a^{m-3}.\quad \alpha^{h-1}$$
$$a^{m-2}.\quad \alpha^{h-2}$$
$$a^{m-1}.\quad \alpha^{h-3}$$
$$a^{m}.\quad \alpha^{h-4}$$

3) In jeder dieser Potenzen schreibe
obigen Formel für

$$T(a\dagger\dagger|n|)^{m} = m.a^{m-1}|n| + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}.T(b$$

der Formel
ichstfolgen-
dem vier-

te aus den
gehören, de-
oder Unter-
der Formel
α und a ist

an aus der

†|n-1|)²††

$$+\frac{\ldots}{1.\;2.\;3.\;1}a^{m-3}.\alpha^{h-1}\,T(b\dagger\dagger|n-3|)^3(\beta\ldots$$

$$+\frac{m\;m-1.\;h.\;h-1}{1.\;2.\;1.\;2}a^{m-2}.\alpha^{h-2}\,T(b\dagger\dagger|n-3|)^2\,(\beta\ldots$$

$$+\frac{m.\;h.\;h-1.\;h-2}{1.\;1.\;2.\;3}a^{m-1}.\alpha^{h-3}.T(b++|n-3|).$$

$$+\frac{h.\;h-1.\;h-2.\;h-3}{1.\;2.\;3.\;4}a^{m}.\alpha^{h-4}.T(\beta++|\nu-3|)^4$$

Anmerkung 2. Wenn z. B. m=3
hier das Stück, worin a^{m-4} vorkommt, aus. –
nen sonst *m* und *h*, gleich oder ungleich seyn.

Ist m=3, h=3, so fällt außer dem e
auch das letzte weg.

19. Anmerkung 3. Der Coefficient T
(β++|ν|) kann angesehen werden als ein Thei
Entwickelung der Substitution weiter bedarf,
1. §. 4. Die übrigen erfordern Substitutione
derselben Formel gemacht werden.

Wie viele aber auch solcher Substitutionen nöthig sind, so zeigt sich doch auch hier, wie oben §. 10, daß es unmöglich ist, noch weniger zu machen, wenn die heterogenen Produkte, die in dem gesuchten Coefficienten enthalten sind, alle angegeben werden sollen. Die Formel giebt diese Produkte also auf dem kürzesten Wege r).

Man kann aber auch hier jeden Theil, als eine eigene Klasse von Produkten, oder auch jede Unterabtheilung, die zu einer Klasse gehört, außer ihrer Ordnung herausnehmen und für sich entwickeln.

20. Satz 7. Die Summe aller Coefficienten in $(a+bx+cx^2+\ldots)^m$ bis auf den nten, diesen eingeschlossen, wird gefunden, wenn in der allgemeinen Formel, und zwar in allen Theilen derselben, nach und nach, statt $|n|$, $|n-1|$, $|n-2|$ u. s. f. die vor diesen vorhergehenden Coefficienten aus dem ursprünglichen Polynomium gesetzet, bis auf den ersten in jedem Theil zurück, und dann diese Wehrte summirt werden. Die Summirung ge-

r) Daß auch hier Substitutionen in Substitutionen, und zwar häufiger als vorher (Note l) vorkommen müssen, erhellet schon aus der Menge der einzelnen Potenz-Coefficienten, und wird auch hier ausdrücklich erinnert. Wenn aber Herr T. behauptet, seine Formel (§. 17.) gebe diese Produkte auf dem kürzesten Wege, so muß ich mich darüber eben so, wie in der Note m erklären; ja ich kann mit Grunde behaupten, daß Jedem, der selbst prüfen will, vornehmlich bey dem hier (§. 17.) aufgeführten Produktenprobleme, der Vorzug der Combinationsmethode (die sich vornehmlich bey großen Verwickelungen recht wirksam zeigt) sehr einleuchtend in die Augen fallen werde. Man versuche nur, auf eine der hier im Texte ausgedrückten ähnliche Art, den Werth von $(R^s Q^h P^m)^{\times 4}$ in einer Formel anzugeben, den ich im Arch. d. Math. (H. 2. S. 227, 7.) aus der dortigen so einfachen und leichten combinatorischen Formel entwickelt dargestellt habe. Schon dieser einzige Versuch wird die große Schwierigkeit der Sache von dieser Seite deutlich darlegen. H.

nommen, als den Coefficienten zu x^0, so wird die
aller $m a^{m-1} |n|$ oder

$$\int . m a^{m-1} |n| = a^m \text{ (für a anstatt } |n|, \text{ na}$$
$$+ m a^{m-1} b + m a^{m-1} c + + m$$
$$= a^m + m a^{m-1} (b + c + + |n|)$$

Ferner ist $T(b + + |n-1|)^2 = 2. b. |n-1| + T(c + -$
und wiederum $\int . 2. b. |n-1| = b^2 + 2 b (c + d + +$

Auch $T(b + + |n-2|)^3 = 3. b^2 |n-2| + 3. b T(c +$
$$+ T(c + + |n-4|)^3$$
und $\int 3 b^2 |n-2| = b^3 + 3 b^2 (c + d + + |n-$

Folglich

$$\int T(a + b + + |n|)^m = a^m + m. a^{m-1} (b + c -$$
$$+ \frac{m.\ m-1}{1.\ 2.} a^{m-2}((b^2 + 2b. (c + d + + |n-1|)) + \int T(c +$$
$$+ \frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3}((b^3 + 3 b^2 (c + d + + |$$
$$+ 3. b. \int T(c + + |n-3|)^2 + T(c + -$$
$$+ \quad +$$

$$\begin{cases} + c^3 + 3c^2.(d + e + + \\ + 3cd^2 + 3.2.c.d.(e+f+ + \\ + d^3 + 3d^2(e + f + + \end{cases}$$

$+ + +$

wo sich das Gesetz des Fortgangs deutlich zeigt [s]

22. Anmerkung I. Die oben schon i und II bey der ersten Formel gemachten Anm lassen sich bey dieser zum Theil wiederholen. All rogene Produkte, die in der ganzen Coefficienten- enthalten sind, werden mit ihrer Anzahl in den Coefficienten auf einmal gegeben. Und bey der C lung kann man die verschiedenen Gattungen, w jede Art dieser Produkte gehört, auch außer ih nung herausheben.

s) Die hier aufgestellten, aus der Formel (§. 20.) dur tution abgeleiteten Glieder, enthalten zugleich den Potenz $(a + b + c + d + e + f +$ ꝛc.$)^m$, wie auch unte erinnert wird, und kommen in der Folge der Buch meiner Darstellung ((*Infin. Dignit. p.* 26, 1) über Gesetz des Fortgangs der Glieder dürfte doch, aus Texte entwickelten, nicht Jedem deutlich einleuch leichtes combinatorisches Gesetz wird in der folgend nachgewiesen. H.

Anmerkung 2. Wenn man einmal die Entwickelung festgesetzt hat, bis auf den Theil b^m, (falls ein solcher vorhanden ist, wie er ist, wenn $n = m + 1$, oder größer); so ist die noch fernere Entwickelung bloß eine Wiederholung der schon geschehenen. Man schreibt nur *b* statt *a*, und so statt eines jeden der ersten Coefficienten den nächstfolgenden, so wie unter den letzten statt $|n|$ alsdann $|n-m+1|$, und statt der vorhergehenden von jenem die vorhergehenden von diesem, bis die Reihen abbrechen.

Anmerkung 3. Hat das ursprüngliche Polynomium nur eine bestimmte Zahl von wirklichen Theilen, nemlich $|\nu|$, und die Zahl der Coefficienten in $(a + bx + + |n| x^{n-1})^m$ oder deren Summe man sucht, ist *n*, das von der letzte zu x^{n-1} gehört, und ist *n* größer als ν, so giebt man (eben so wie oben §. 6.) jenem ursprünglichen Polynomium *n* Theile, davon alle, die auf den νten folgen, Nullen sind.

23. Zusatz 1. Ist *n* so groß als die Zahl aller Coefficienten in $(a + bx + + |\nu| x^{\nu-1})^m$, welche $(\nu-1)m+1$ ist, so erhält man die Summe aller Coefficienten der *m*ten Potenz. Und dann ist es einerley, ob *n* nun noch größer genommen werde oder nicht, weil dadurch jene Summe nicht vergrößert wird. Mann kann also *n* so unbestimmlich groß annehmen, daß in der obigen Formel $n-1$, $n-2$, $n-3$, u. s. f. alle noch größer sind als ν. Dann werden alle Reihen die in der Formel (§. 21.) bey $|n-1|$, $|n-2|$, $|n-3|$, u. s. f. abbrechen, fortgehen bis $|\nu|$. Auf diese Art erhält man die ganze Summe der Coefficienten in $(a + bx + + |\nu| . x^{\nu-1})^m$.

24. Satz 8. In den Polynomien der zwoten Art (§. 1.) $(a + b + c + d + + |\nu|)^m$, wo die Theile nicht nach den Potenzen einer veränderlichen Größe geordnet werden, sind sie

$$= a^m + A a^{m-1} \left(b + c + d + + |\nu|\right)$$

$$+ B a^{m-2} \left\{\begin{array}{l} b^2 + 2b(c + d + + |\nu|) \\ + c^2 + 2c(d + e + + |\nu|) \\ + d^2 + 2d(e + f + + |\nu|) \\ \quad + + \\ \quad (|\nu|)^2 \end{array}\right\}$$

$$+ C a^{m-3}. \left\{\begin{array}{l} b^3 + 3b^2(c + d + + |\nu|) \\ + 3bc^2 + 3.2.\, b\, c.(d + e + + |\nu| \\ + c^3 + 3c^2(d + e + + |\nu|) \\ + 3cd^2 + 3.2.cd(e + f + + |\nu|) \\ + d^3 + 3.2.d.e.(f + g + + |\nu|) \\ \quad + + + \\ \quad (|\nu|)^3 \end{array}\right.$$

$+ +$ t)

t) Diese durch Substitution hier abgeleiteten Glieder
(a + b + c + d...)m kommen mit den Gliedern meiner For
(*Infin. Dign. p* 40.) vollkommen überein, bey welchen
simple combinatorische Verfahren (Ebendas. p. 17, 18)
Grunde liegt, welches also, so wie das allgemeine G
(Ebendas. p. 41) den Fortgang der Glieder deutlich n
weiset, wofür man auch die Tafel (Ebend. p. 157, 158) w
man darinn b, c, d... für a, b, c... setzt, gebrauchen ka
Die Formel (*Infin. Dign. p.* 40) die ich hier nur wegen
dort entwickelten Glieder angeführt habe, ist mit den (Ebe

cienten=Summe in $(a + bx + cx^2 +$

Nach Anleitung der obigen Formel kön
Ordnungen aufgesucht werden, die durch
a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, u. s. f. characterisirt sind
Ordnung hat man alle Theile, in denen eine
mit den folgenden Theilen *b*, *c*, . . . und ih
verbunden sind. Alsdann geht man zu de
die durch Potenzen von *b* characterisirt wer
ter diejenigen Theile nur kommen, worinn
b mit den auf *b* folgenden Theilen und de
beysammen sind, worinn aber *a*, das ist ein
der Theil, nicht mehr enthalten ist. — Wei
durch *c* charakterisirten Classen. Diese haben
auf *c* folgenden Factoren, wo schon *a* und

p. 119, 146, 147 und (*Nov. Syst. Perm. p.* LI
führten einerley; aber, welcher Unterschied in A
volle Darstellung, welche die combinatorischen
ren über alles leichten Entwickelungen in den
verschaffen! Man sehe Toepfers comb. Anal. Not

gen sind. Auf dieselbe Weise geht man weiter fort. Die folgenden Classen werden immer kleiner und kürzer. [u])

Wenn aber die erste Ordnung oder Classe, deren Charakteristik *a* ist, entwickelt worden, so macht man daraus die zweyte, deren Charakteristik *b* ist, wenn in dem ersten anstatt *a*; *b*, und statt jedes andern Theils der nächstfolgende gesetzet wird, so weit dieß gehet.

26. Zusatz 2. Ist $(a+b+c++)$ ein Infinitinomium, so giebt die Formel in §. 24. alle Theile von $(a+b++|\nu|)^m$. Darunter ist aber keiner von den auf $|\nu|$ folgenden Factoren. Allein man kann diesen Theil $|\nu|$ so weit hinaussetzen, wie man will, und man sieht das Gesetz für jede Classe in infinitum.

27. Anmerkung. Die Produkte $(a+b+c++)^m \cdot (\alpha+\beta+\gamma+++)^h = p^m q^h$, werden nach der Formel (§. 17.) auf eine ähnliche Weise entwickelt. [v]) Ich halte es für weniger nöthig, darinn näher hinein zu gehen. Die Hauptsache ist immer die allgemeine Polynomialformel, aus der alles übrige leicht hergeleitet wird. Ich kann auch nun meines Versprechens mich entlediget halten, für die von mir in den Schriften der Königl. Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften, (Neue Samml. 5ter Th. S. 131 u. f.) vorgelegten

u) Ein Beyspiel einer solchen Anordnung geben die Glieder meiner Tafel (*Infin. Dign.* p. 157, 158) für ganze positive Werthe von n, wie hier nur allein vorkommen. H.

v) Die Produkte . . . $s^g r^f q^h p^m$, oder das allgemeine Glied $(\ldots . s^g r^f q^h p^m)\, 7\, (n+1)$ derselben, erhält man aus meinen in Note q (Arch. der Math. S. 224-228) citirten Formeln, wenn man darinn $z=1$ setzt; wo man die Variationsclassen zu bestimmten Summen, so wie sie die Formeln geben, lassen, oder solche, nach der combinatorischen Relation (*Nov. Syst. Perm.* p. XLIX, L, 2) in *Classes Variationum simpliciter* abändern kann. Das letzte würde die Glieder so geben, wie sie im Texte stehen würden, wenn der Herr Verfasser ihre nähere Entwickelung hier hätte beybringen wollen. H.

Formeln, worauf Probleme der Probabilitäts-Rechnung führten, die Beweise nachzuliefern. Diese sind nur specielle Formeln, die aus den hier vorgelegten und bewiesenen allgemeinen leicht hergeleitet werden. Zu den Vortheilen, welche die formula polynomii verspricht, rechne ich auch diese, daß sie als die **Vervollständigung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung** angesehen werden kann, in so ferne die letztere bloß theoretische Arithmetik ist. w) Denn ein anderes ist es, in so ferne Grundsätze aus Erfahrung dazu erfordert werden, worauf jene angewendet werden soll.

w) Ausserdem, daß das Polynomialtheorem das wichtigste und am weitesten sich erstreckende der ganzen so viel umfassenden Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, so dehnt sich auch sein Nutzen über die gesamte Analysis überhaupt, und die Reihen insbesondere, aus. Herr Prof. **Klügel** (in der **folgenden Abhandlung** §. 4) sagt daher sehr wahr und expressiv „der polynomische Lehrsatz gebe gleichsam einen hohen Standort ab, „von welchem man die Gefilde der Analysis übersehen könne; „auch gehöre (**Ebend.** §. 25) dieser Lehrsatz nicht sowohl der „Differenzialrechnung als der Analysis des Endlichen zu, wel„che außerdem kein für sich bestehendes Ganze ausmachen wür„de." Kein Wunder also, daß die Analysten seit de Moivre, sich gleichsam um die Wette beeifert haben, diesem Satze alle nur mögliche Vollendung in Absicht auf Darstellung und Entwickelung zu geben. Eine ausführliche Geschichte dieses höchstmerkwürdigen Lehrsatzes ist in meinem oftangeführten Werke, *Infinitinomii Dignitatum Historia etc.* enthalten. Als Erweiweiterung und Fortsetzung dieser Geschichte, sind noch hieher zu rechnen, mein Aufsatz im Archiv der reinen und angew. Mathem. (Heft IV. S. 385—424) und ein großer Theil des Inhalts der in gegenwärtiger Schrift befindlichen Abhandlungen. H.

1. Der Zweck dieser Abhandlung ist, die Gründ
die ganze Analysis so wichtigen Polynomischen
kurz und faßlich zu entwickeln, die drey Formen
deutlich darzustellen, insbesondere aber den Be
beiden combinatorischen Formen, unabhängig
Binomial-Theorem, für jede Gattung von Ex
zu machen.

2. Die Analysis endlicher Größen besteht a
Haupttheilen, die zwar durch gegenseitige Hülfsl
mit einander verbunden sind, aber nicht einer
andern beruhen. Es sind gleichsam zwey Gebäu
auf seinem besondern Grunde, deren Zimmer aber
ander Gemeinschaft haben. Um die Vergleichung
setzen, füge man hinzu, daß sie einen gemeinsch
Vorhof, die Buchstabenrechnung, haben.

3. Diese beiden Theile sind die Algebra
Analysis im engern Verstande.*) Jene

*) Die Analysis der Alten, oder überhaupt die Analy
bloß zeichnenden Geometrie ist eine Methode bey der
der Aufgaben: die Analysis der Neuern ist ein S
höhern und allgemeinern Arithmetik. Ihre Metho
darin mit der geometrischen Analysis überein, daß be

tigt sich mit den Eigenschaften der Gleichungen, der Zusammensetzung und Entwickelung derselben, wenn mehrere mit einander verbundene vorhanden sind, und mit der Darstellung des Unbekannten durch das Bekannte. Die eigentliche Analysis hat zum Gegenstande überhaupt die Formen der Größen, nemlich theils die Umwandlung einer Form in eine andere, theils die Darstellung der Glieder einer stetigen Fortschreitung durch die zugeordneten Glieder einer andern Reihe nach irgend einem Gesetze. a) Sie theilt die Größen ein in unveränderliche (oder bestimmte) und in veränderliche (oder unbestimmte); die Algebra, in bekannte und unbekannte. Die letztern sind entweder ganz bestimmt, oder, wenn sie nicht bestimmt sind, doch an gewisse Bedingungen gebunden, wie in der

tersuchung der Relation der Größen die unbekannten Größen eben so behandelt werden, als wenn sie bekannt wären. K.

a) Die Analysis beschäftiget sich vorzüglich mit den Functionen aller Art und ihren nach gegebenen Bedingungen erfolgenden Veränderungen; daher man sie auch zuweilen die Theorie der Functionen genannt hat. Diese Theorie, mit ihren sehr mannichfaltigen Modificationen, von sehr ausgedehntem Umfange, ist bis itzt noch so wenig erschöpft, daß das Viele Vorhandene doch nur als Bruchstück eines grossen vielumfassenden Ganzen anzusehen ist. Dahin gehören unter andern die wichtigen Abschnitte: *Functionum diversarum affectiones et relationes; functionum transformatio, siue in alias formas transmutatio; functionum explicatio et in series evolutio; functionum in factores resolutio; functionum limites*; u. a. m. Herr Prof. Klügel hat hier, zum eigentlichen Gegenstande der Analysis überhaupt die Formen der Größen, nach ihrer Entwickelung und Umwandlung in verschiedene Gestalten, angegeben; weil sich im Allgemeinen Alles, was wir von den Functionen und ihren Veränderungen wissen, darauf zurückbringen läßt. Auch Herr von Tempelhoff bezieht den großen Nutzen der Lehre von den Functionen vornehmlich auf die Verwandlung ihrer Formen (Anfangsgr. der Anal. endl. Gr. §. 784). Wie nützlich nun, vorzüglich bey Formenumwandlungen, und also recht eigentlich in analytischer Hinsicht, die combinatorischen Operationen, hauptsächlich diejenigen, die ich unter dem Namen von Involutionen bekannt gemacht habe, seyen, hat Herr Professor Klügel in der Folge dieses Aufsatzes sehr ausführlich gezeigt und dargethan. Hindenburg.

+ Dy^3 + etc; weil hier beide, x und y, veränderlich
sen sind, und das Gesetz der gemeinschaftlichen V
aller x in der Gleichung dargestellt wird. Die unbe
lichen Coefficienten sind Größen, die aus andern
nen hergeleitet werden, und daher ursprünglich unb
Größen. Die Algebra leistet hier ihre Dienste, w
dieselben y mehrere Reihen von x Statt finden,
Coefficienten mehrere Werthe haben können. D
eine einzelne Reihe ist die Sache durch bloße Divis
gethan, oder braucht auch dieser nicht. Die Alge
darf der Analysis mehr als diese jener, bey der Zus
setzung der Coefficienten einer algebraischen Gleichu
den Combinationen der Wurzeln; bey der Verwa
einer Gleichung in ein Product, wobey es nothwe
der Gleichung einen unbestimmten Werth zu geben
bey der Entwickelung der Cardanischen Formel,
Falle dreyer möglichen Wurzeln. Ueberhaupt ist d
lysis im engern Verstande der wichtigere Theil; th
gen des Inhalts, da die Betrachtung der Formen ei
das Interessante in der Mathematik ist, theils w
mannigfaltigen Anwendung. Die Algebra ma
durch ihre Dienste bey der Erfindung des Unbe

mehr nothwendig, als durch die Behandlung ihres Gegenstandes angenehm. Bey den Gleichungen vom dritten Grade schon geräth sie in eine gewisse Verlegenheit, muß die vom vierten Grade durch eine Art von Involution auflösen, und kann die Wurzeln der höhern Gleichungen gar nicht als durch Annäherung in bestimmten Zahlen finden.

4. Diese vorläufigen Bemerkungen sollen dienen, die Beziehung des polynomischen Lehrsatzes auf das ganze System deutlicher zu machen. Nach der Buchstabenrechnung, die sich mit den leichtesten Umwandlungen der Formen beschäftigt, kommt man, wenn man die Algebra liegen läßt, zunächst auf höhere Aufgaben der Multiplication, der Division und andere; b) also, wenn die Factoren, woraus eine Größe hervorgebracht, oder in welche sie zerlegt wird, unter einander gleich sind, auf den polynomischen Lehrsatz. Dieser ist gleichsam ein hoher Standort, von welchem man die Gefilde der Analysis übersehen kann. Um aber zu demselben zu gelangen, müssen einige Untersuchungen über die Verbindungen vieltheiliger Grössen vorangehen. Diese betreffen die Fragen über die Ver-

b) Daher eben die bestimmte Ordnung der von mir (*Nov. Syst. Perm. p.* XXVII—XXXI.) aufgeführten Aufgaben, mit ihren analytisch-combinatorischen Formeln: 1) *Serierum in Series Multiplicatio* (*p.* LXIX—LXXVI.): 2) *Serierum per Series Diuisio* (*p.* LXXVII—LXXXIII.) 3) *Serierum Dignitates et Radices* (*p.* LIV—LVI.); 4) *Serierum in series substitutio*; dahin der *Methodus Potentiarum* (Infin. Dign. §. XXIV. p. 100 seq.) gehört, u. s. w. wo überall statt der algebraischen und transscendentischen, oft sehr beschwerlichen, die ungleich leichtern combinatorischen Operationen in den Formeln substituirt werden. Das Bestreben nemlich, diese und ähnliche Aufgaben auf dem leichtesten und natürlichsten Wege aufzulösen, führte mich unvermerkt auf Combinationsverfahren, die eine regelmäßige Anordnung und Darstellung der combinatorischen Operationen und Involutionen nothwendig machten. Die Sache wird dadurch so, über alle Vorstellung hinaus, leicht, weil man es hier mit den Elementen selbst, und deren nach sehr simpeln Regeln erfolgenden Zusammensetzung und Trennung, zu thun hat. 5.

Verbindungen oder Combinationen, die von je n v… denen Größen aus der ganzen Anzahl von m Grö… macht werden können, ist leicht. Ihre Auflösung … sich in den. Lehrbüchern der Analysis, insbesond… Segners Analysis Finit. Sect. V. wo die … rie zum Behuf des binomischen und polynomische… satzes abgehandelt ist. Ausführlichen und grün… Unterricht in dieser Untersuchung giebt Hr. Prof. … denburg in den primis lineis novi syste… permutationum, combinationum et var… num. Lips. 1781, und in der Schrift: Infin… mii dignitatum historia, leges ac form… Göttingae, 1779. §. XXII. XXVII. Diesen sind … neuere Abhandlungen desselben (in dem Archiv der … matik) über combinatorische Involutione… zufügen.

6. Da das Verfahren, Combinationen dur… volutionen darzustellen, neu und sinnreich ist, c) …

c) Die combinatorischen Involutionen haben, … ihrer so wichtigen Anwendung in der Analysis, den un… ten Beyfall der Kenner erhalten. Herr Professor K… schrieb mir darüber in vorigem Jahre: „Die Invol… „habe ich mehrmals mit dem Vergnügen betrachtet, wo…

d a b c e	f
a d b c e	f
.	.
.	.
.	.
e a b c d	f
a e b c d	f
.	.
.	.
.	.
d e a b c	f
e d a b c	f
u. s. w	.

e kommt, so setze man diese zuerst i
Stelle zu jeder der Versetzungen
darauf setze man in die letzte Stelle
vorhergehende Größe d, und nehm
bisherigen Versetzungen statt jedes
ben den vorhergehenden, wobey e fü
weil man sich die Größen in einem
schrieben vorstellen muß. Aus de
Classe, die sich auf d endigt, wird
selbe Art die Classe, die sich auf
hergeleitet u. s. w. Eine kleine Al
in der Folge der Versetzungen wird
der Vergleichung mit der in dem A
D. gesetzten bemerken. d)

„Kunstkenner vor einem schönen Gemälde, einer sch
„tue stehen bleibt. Jede höhere Involution ste
„alle niedrigere dar, und diese sind nothwendige
„stücke von jener. Die Wichtigkeit dieser Untersuc
„kenne ich vollkommen. Ohne eine befriedigende
„der combinatorischen Operationen, vorzüglich aber
„lutionen, ist die Lehre von den Combinationen,
„doch so vieles gründet, äußerst mangelhaft. Ich

7. Auch die Combinationen lassen sich durch Involutionen sehr bequem aufzählen. Es seyn z. B. 7 Größen, a, b, c, d, e, f, g, aus welchen je 4 verschiedene zu nehmen sind. Die Combinationen, welche a enthalten, sind folgende:

abcd	acde	adef	aefg
...e	...f	...g	
...f	...g	adfg	
...g	acef		
abde	...g		
...f	acfg		
...g			
abef			
...g			
abfg			

Die Combinationen, welche b ohne a enthalten, werden auf dieselbe Art aus den Größen b, c..g gefunden; und auf ähnliche Art alle übrigen (*Infin. Dign. p.* 161. *Tab.* II.)

„der Folge bey schweren analytischen Untersuchungen sehr aufmerksam darauf seyn; auch hoffe ich von den Combinationen, „so wie von den Lokalzeichen und Formeln, in meinen weitern „Untersuchungen über die astronomischen Perturbationen guten „Gebrauch zu machen." Von den Involutionen überhaupt, mit Beziehung auf bestimmte Vorschriften und Beyspiele, mehrere Abhandlungen von mir (Arch. der Math. Heft I—IV). Von dem Eigenthümlichen dieser Art von figürlicher Anordnung insbesondere (Ebendas. H. III. S. 323—325). Von ihrer endlichen Vollendung in Absicht auf Allgemeinheit und Kürze der Darstellung, wird in der Folge (in meinem in dieser Schrift befindlichen Aufsatze) das Nöthige beygebracht werden. H.

d) Die Complexionen des Textes gehen nach fallenden Endbuchstaben f, e, d, c.., wie die bey mir (Arch. a. a. O.) nach steigenden Anfangsbuchstaben a, b, c, d.. fort. Beides kann auf mehrere Arten geschehen. Versetzungen, ohne bestimmte Folge von Anfangs- oder Endbuchstaben (meine Beschreib. Zahlen abzumessen rc. S. 93). Die Versetzungen im Archiv gehen unter sich, wie wachsende Zahlen fort; welches in vieler Rücksicht bequem ist.

H.

a, b, c, d, e, f, etc

m Größen heraus. Diese mögen nun entwede
schieden seyn, oder eine, zwey, drey und meh
ben mögen mehrmals in die Verbindung auf
werden, so ist die Frage, alle Arten der Ver
gen in Absicht auf die Menge der
denen darinn enthaltenen Größen
z. B. wenn 5 Größen verbunden werden, so sin
schiedenen Gattungen (*genera*) der Verbindu
Dignit. p. 168, 5)

abcde; aabcd; aabbc; aaabc;
aaabb; aaaab; aaaaa.

Diese Verbindungen sind unähnlich; dagegen a
bcdef, oder aabcd und abbcd, u. s. f. ähn
bindungen sind, nämlich in Absicht auf die An
gleichen und ungleichen Größen, nicht in Absich
Größen selbst. *). Allgemein sey die Anzahl de

*) Hr. Prof. Hindenburg nennt Verbindungen (
xiones) ähnlich, die in den Größen übereinko
nur in der Stellung derselben verschieden sind. N
stema permutationum etc. §. II. 22. Ich
gleichgültige nennen. K. Die Benennung

10. Wenn die Größen ein Gesetz der Folge
so sind die Verbindungen einer gegebenen Anzahl der
nach den Potenzen, worauf die gemeinschaftliche in
als Factor enthaltene Größe steigt, abzutheilen.
man nehme aus der Reihe,

$A;\ Bz;\ Cz^2;\ Dz^3;\ Ez^4;\ Fz^5;$ etc

heraus 5 Größen, welche in der Verbindung die
Potenz, z^4, enthalten. Die verschiedenen Verbind
solcher Größen sind

$AAAAEz^4;\quad AAABDz^4;\quad AAACCz^4;$
$AABBCz^4;\quad ABBBBz^4.$

Bezeichnet man die Coefficienten von z durch ihre S
wie folget,

0	1	2	3	4	5	6	.
A,	B,	C,	D,	E,	F,	G,	etc.

so erhält man alle Verbindungen von m Größen m
selben Potenz z^n, wenn man den Exponenten n
möglichen ganzen Theile zerlegt, deren Anzahl nicht
als m ist, für diese Theile die dazu gehörigen Größ

gültige" würde zwar gut auf Producte aus Factoren
nicht allgemein für Complexionen aus combinatorisch
menten, passen. H.

die Anzahl der verbundenen Größen, in dem zw
Exponent von z. Sieht man in jenem Falle di
a, b, c, d, etc. als Größen von einer einzigen D
an, so werden die gesammten Verbindungen von n
sionen nach den Formen der Dimensionen ihrer
theile gesondert. In dem zweiten Falle aber k
nicht den Größen A, B, C, etc. eine Dimension
weil sie bloß als numerische Coefficienten zu den
einer gewissen Größe z zu betrachten sind. Sol
Dimensionen Rücksicht genommen werden, so we
durch den Exponenten der Potenz von z bestimm
gesammten Verbindungen werden hier nach den
von z^n, oder den Dimensionen, worauf z steigt
net. In jeder einzelnen Verbindung mit einer g
Potenz z^n ist die Summe der **Abstände** der Fac
dem Anfangsgliede A gleich dem Exponenten n,
der Abstand = 0 ist. Die Anzahl der Factoren

12. Es ist nicht leicht, eine sichere und
Regel zur Zerfällung einer ganzen Zahl in alle ih
chen ganzen Theile zu geben. **Leibnitz** ist der

ſungen zu finden (Arch. der Math. IV. Heft S. 40…
Ohne diese zu kennen, trug Hr. Prof. Hinden…
seine, von jener ganz verschiedene, Auflösung der A…
von der Zerfällung der Zahlen in einer akademischen …
vor: Methodus nova et facilis serieru…
finitarum exhibendi dignitates, Lipſ. …
und hernach in einer ausführlichern Schrift: Inf…
nomii dignitatum hiſtoria, leges ac f…
lae. Göttingae 1779. (§. XXII.). Eine zwey…
lösung hat derselbe in einem akademischen Pro…
1795, und in dem Archiv der Mathematik (IV…
S. 393) mitgetheilt. Damit man alle drey Au…
gen mit einander vergleichen könne, setze ich von …
ben ein Beyspiel an den Zerfällungen der Zahl 7 he…

5, 2	1, 1, 1, 2, 2	2 5
6, 1	1, 1, 1, 1, 1, 2	3 4
7	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	7

Die Darstellung der Zerfällungen nach Bos
ist zu dem Gebrauch bey dem polynomischen Lehrs
zu Combinationen überhaupt nicht so bequem,
beyden von Hrn. Hindenburg gefundenen,
Abtheilung nach jener kann sehr leicht aus diesen
tet werden. Die erste Hindenburgische Zerfäl
dient vorzüglich, wenn mit der Zerfällung zugleic
theilung nach der Anzahl der Theile (nach Cl
verlangt wird; wie dieses bey der zweyten Form
lynomischen Lehrsatzes der Fall ist. Die zweyte
burgische Zerfällungsart ist in so fern von noch
nerm Gebrauche, weil nach derselben, mit den Z
gen einer Zahl zugleich die durch Winkelhaken v
der gesonderten Zerfällungen aller kleinern darges
den. Dieses ist gerade dasjenige, was bey dem
mischen Lehrsatze, nach den beiden ersten Formen
zu leisten ist. Zwar liegen die Zerfällungen der

jeder Complexion (einzelnen Zerfällung) in zwey
um die Complexionen der folgenden Classe zu beko
so fern dadurch nicht eine kleinere Zahl nach einer g
zu stehen kommt, weil eine solche Complexion schon
den vorhergehenden befindlich seyn muß, wenn si
der Folge der Zahlen geordnet sind. Nach der z
Methode wird den Zerfällungen einer Zahl entweder
angesetzt, oder es wird der niedrigste Theil um 1 v

*) In Absicht auf Allgemeinheit scheint mir meine zwe
der Zerlegung keinen Vorzug vor der ersten zu haben
aber in Ansehung der etwas größern Leichtigkeit in
stellung, wegen des einfachern Gesetzes der Zusamme
Dagegen ist, in Beziehung auf die Analysis überhaup
blos in Rücksicht auf den polynomischen Lehrsatz) mei
Art von Zerlegung (nach Classen von gleichvielen
von weit ausgedehnterm Umfange in der Anwendung
zweyte; weil es unzählig viele Fälle giebt, wo man
Complexionen einzelner Classen (der einzelnen Abth
zwischen den horizontalen Linien) nicht aber aller Cl
sammen nöthig hat. Auch enthält meine erste Art z
Involutionen 1) der niedrigern Summen dur
Classen 2) der niedrigern Classen zu verschiedene
men in den einzelnen Classen; und man kann jede
den übrigen, hier im Texte angeführten Anordnungen
blicklich aus ihr darstellen. Das Letzte gilt auch von
den andern Anordnungen, und ist eine natürliche F
von, daß man bey den Combinationsverfahren im
Elemente in der Zusammensetzung vor sich hat. S

2, 2, 2, 2	2, 2, 2, 3	2, 2, 2,
2, 2, 4	2, 2, 5	2, 2, 2,
2, 3, 3	2, 3, 4	2, 2, 3,
2, 6	2, 7	2, 2, 6
3, 5	3, 3, 3	2, 3, 5
4, 4	3, 6	2, 4, 4
8	4, 5	2, 8
	9	3, 3, 4
		3, 7
		4, 6
		5, 5
		10

Die Anfangszahlen folgen nach ihrer Größe
ander; eben so die Zahlen in der zweyten Stelle,
die Zahlen in der ersten dieselben sind; wieder ebe
Zahlen in der dritten Stelle, so weit die in den be
sten Stellen dieselben bleiben; u. s. f. Die Zerfä
welche keine Eins enthalten, sind hier unabh
von den vorhergehenden Zerfällungen gefunden
auf welche Art sich auch die Zerfällungen ohne 1

ohne 1; 2; 3, u. s. f. finden lassen. Wie die Zerfällung mit einer bestimmten Anzahl von Theilen, ohne die übrigen, bewirkt werde, zeigt Hr. Hindenburg in der Schrift: Infinit. dign. pag. 80.

13. Bey den Verbindungen von m Größen aus einer Reihe, die kein Gesetz der Folge hat,

a, b, c, d, e, f, g, etc.

sind die Theile in den Zerfällungen der Zahl m die Exponenten der Größen, die zu einer Verbindung genommen werden. Man braucht also nur aus der Tafel der Complexionen jeden Bestandtheil einer Complexion von der Summe m als Exponenten zu einer der Größe aus der Reihe zu setzen, so erhält man jedesmahl eine Gattung einer Complexion, die hernach noch durch Veränderung und Versetzung der Größen abgeändert wird, sich aber ähnlich bleibt. Man ordne diese Complexionen nach der Folge der höchsten Exponenten, z. B. für $m = 7$,

$abcdefg$;	a^2bcdef;	a^3bcde;	a^4bcd
	a^2b^2cde;	a^3b^2cd;	a^4b^2c
	$a^2b^2c^2d$;	$a^3b^2c^2$;	a^4b^3
		a^3b^3c;	

a^5bc;	a^6b;	a^7.
a^5b^2		

Die Anordnung ist hier nach der von Boscovich gebrauchten (§. 12.) gemacht worden.

14. Sind die Größen an ein Gesetz der Folge gebunden, wie in §. 10, so bedeuten die Theile einer zerlegten Zahl die Abstände der Glieder der Reihe von dem Anfangsgliede. Man setze also die Zahl selbst dem Exponenten von z in einer Verbindung gleich, und für die Theile der Zahl die Größen, deren Stellen sie angeben, so erhält man alle Verbindungen mit der gegebenen Potenz z^n. So entstehen aus der Reihe

a; bz; cz^2; dz^3; ez^4; fz^5; gz^6; hz^7 etc.

Lehrsatze völlig gebahnt. Dieser hat zwey Haupt
In der einen werden die Glieder der Potenz aus d
dern der Wurzel unmittelbar zusammengesetzt, u
Form ist von zweyfacher Art, nach Beschaffen
Theile der Wurzel. Diese sind nämlich entwe
unverbundene Größen: a; b; c; d; e; etc, oder
nach den Potenzen einer Größe z geordnet, daher
Glieder der Potenz nach diesen zu ordnen sind. Di
Hauptform ist diejenige, in welcher jeder Coeffic
Potenzen z^n, nach welchen die Glieder der Wurzel
Potenz geordnet werden, aus allen vorhergehende
mengesetzt wird. Auf die erste Hauptform kom
bey der unmittelbaren Entwickelung einer Potenz d
Multiplication; auf die zweyte bey dem Gebrau
Reihe mit unbekannten Coefficienten, welche die
Potenz darstellt. Für diese unbekannten Coeffici

*) Nicht coefficientes ficti, sondern incogniti oder assu
unbekannte Größe in einer Gleichung ist keine erdichte
K.

Der Ausdruck *Coefficientes ficti* ist von Leibnitzen.
nennt er, *qui assumuntur tanquam dati*, und setzt
mer den datis, durch die sie sich bestimmen lassen,

werden Gleichungen gesucht, und diese sind es, welche jeden durch den vorhergehenden liefern. Die beiden Gattungen der ersten Hauptform können die combinatorischen Formen heißen, die zweyte Hauptform aber die involutorische.

16. Es soll nun erstlich die vieltheilige Größe $a + b + c + d + e + f +$ etc $= Q$ auf die Potenz mit dem ganzen positiven Exponenten m erhoben werden.

Diese Potenz besteht aus Partialprodukten von der Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$, in welchen die Summe der Exponenten $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc $= m$ ist, und die Grössen a, b, c, d, etc. auf jede beliebige Art aus der Reihe Q genommen werden können. So viele Zerfällungen die Zahl m zuläßt, so viele Formen von Partialprodukten sind möglich. Dasselbe Literalprodukt ferner, mit denselben Größen, wie a, b, c, d, etc. und denselben Exponenten wie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. kann mehrmahls vorhanden seyn, weil die Factoren auf verschiedene Arten aus den gleichen Factoren der Potenz Q^m genommen werden können. Man unterscheide diese gleichen Factoren nach den Stellen ihrer Folge, als

I. $a + b + c + d +$ etc.
II. $a + b + c + d +$ etc.
III. $a + b + c + d +$ etc.

u. s. f. Jeder dieser Hauptfactoren giebt einen einzelnen Theil als Factor zu einem Partialprodukte her. Man ordne die Partialfactoren nach den Stellen der Hauptfactoren, woraus sie genommen sind. Z. B. aabdabce, so daß die beiden a aus I. und II. der dritte b aus III. u. s. f.

So habe ich auch die Coefficientes fictos (*Nov. Syst. Perm. p. xxxiv, 4.*) erklärt, und mit der dortigen Bezeichnung überall gebraucht. Deutsch können sie angenommene (durch die gegebenen zu bestimmende) genannt werden. H.

genommen seyn. Nun ist klar, daß ein und dasselbe Literalprodukt so oft vorkommt, als oft die Hauptfactoren I. II. III. etc. sich wechseln lassen. Wenn alle Partialfactoren ungleich sind, so ist wieder klar, daß die Menge der Abwechslungen der Hauptfactoren der Menge der Versetzungen von den Partialfactoren gleich ist, oder $= m. m-1. m-2 \ldots 2. 1.$ Sind unter den Partialfactoren α gleiche a vorhanden, so entsteht aus den α Hauptfactoren, woraus die a genommen werden, nur ein einziges Partialprodukt a^{α}, anstatt $\alpha. \alpha-1 \ldots 1$ Produkte, wenn die Factoren verschieden wären, und die Menge aller Partialprodukte für lauter ungleiche Factoren des Produkts abcde ... ist durch $\alpha. \alpha-1 \ldots 2. 1$ zu dividiren, wenn das Produkt ist $a^{\alpha} b c d \ldots$; oder die Anzahl der Partialprodukte von der Form $a^{\alpha} b c d \ldots$ ist $= \frac{m. m-1 \ldots 1}{\alpha. \alpha-1 \ldots 1}$. Auf gleiche Art ist, wenn außer dem Partialfactor a^{α} noch ein solcher b^{β} vorhanden ist, die gefundene Menge noch durch $\beta. \beta-1 \ldots 1$ zu dividiren. So ist die Anzahl der Partialprodukten $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \cdot d^{\delta} \ldots\ldots = \frac{m. m-1. m-2 \ldots 2. 1}{\alpha \ldots 1 \times \beta \ldots 1 \times \gamma \ldots 1 \times \delta \ldots 1 \times \text{etc.}}$, eben diejenige mit der Anzahl der Versetzungen von m Factoren in $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots\ldots$ f)

Man ordne die Partialprodukte nach den Potenzen einer der Größen, a, und zwar der größten unter ihnen, damit $\left(\frac{Q}{a}\right)^m$ außer der Eins, lauter eigentliche Brüche enthalte. Die Partialprodukte haben nun die Formen: a^m; $a^{m-1} b$; $a^{m-2} bc$; $a^{m-2} b^2$; $a^{m-3} bcd$; u. s. w. Es sey, $\alpha = m-r$, so ist die Anzahl der Partialprodukte

f) Noch zwey andere Gestalten, in welchen diese Formel zuweilen erscheint, und wie ihr Werth sogleich aus der Tafel der figurirten Zahlen (*Infin. Dign.* p. 162-165.) zu nehmen sey, habe ich (Ebend. §. XIII.) angegeben. H.

p. IX, 24; XL, 10.). Für das Binomium a+
zweyte gebrochne Factor = 1; daher wir dem e
Namen Binomialcoefficient geben dürfen, wenn gl
her von einem Binomio nicht die Frage gewesen i

Man setze $m = \mathfrak{A}$; $\frac{m.\,m-1}{1.\ 2} = \mathfrak{B}$; $\frac{m.\,m-1.\,m}{1.\ 2.\ \ 3}$

$\frac{m.\,m-1.\,m-1.\,m-3}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4} = \mathfrak{D}$; u. s. f. *)

Ferner, bezeichne man die Summe aller b, c,
durch $\int.$ b; die Summe aller ähnlichen Verbindun
bc, bd, cd, etc durch $\int.$ bc; eben so die Sum
Verbindungen wie bb, oder wie b^2c; durch $\int.$ bb
u. s. f. Wie diese Summen gefunden werden kö
§. 7. gezeigt worden.

*) Herr Prof. Hindenburg setzt oben linker Hand
staben 𝔄, 𝔅, ℭ, ꝛc. den Exponenten der Potenz, wo
durch bezeichneten Binomialcoefficienten gehören, u
$^m\mathfrak{A}$, $^m\mathfrak{B}$, $^m\mathfrak{C}$ u. s. w. In einer allgemeinen C
ristik ist dieser Zusatz nothwendig; hier kann er o
theil wegbleiben. Unten aber §. 19 wo zwey vers
Potenzen mit einander verglichen werden, wird die
nung gebraucht. K.

$+ 90 \int. b^2 c^2 d^2 + 60 \int. b^3$
$+ 30 \int. b^4 c d + 20 \int. b^3 c^3 + 15$
$+ 6 \int. b^5 c + \int. b^6)$

+ 2c. Die Complexionen jeder Classe sind nach
tenzen von b und der übrigen Größen geordnet.

Herr Prof. Hindenburg bezeichnet da
stimmte (n+1)te Glied der mten Potenz der
(das nte nach dem ersten a^m) folgendergestalt:

$$p^m \, 7 \, (n+1) = {}^m\mathfrak{N} \; a^{m-n} \; n'\mathcal{N} \atop (b, c, d, e, f\ldots)$$

Hier bedeuten: p die vieltheilige Größe a
+ d + etc; 7 (n+1) das (n+1)te Glied
benstehenden Potenz p^m; ${}^m\mathfrak{N}$ den nten Binon

g) Die Zahlen der angeführten Zerfällungen (§. 12.) f
Exponenten der zu verbindenden Größen b, c, d,
der Ordnung (§. 13). Man vergleiche (*Infin. Dig*
89—91). Eine Tafel, woraus man diese Repr
ten aller übrigen Complexionen, mit ihren zugehöri
nomialcoefficienten, bis mit der 10ten Diag
weiter, als hier im Texte vorkommt) sogleich ausscht
(Ebendas. p. 168, 169). Die dortigen a, b, c, d..
b, c, d, e...   H.

(numeri propositi, definitae summae)
z. B. hier §. 17. am Ende vorkommen, zu untersc
Eine Tafel für $'\mathcal{N}$, und dadurch auch für $'A$, $'B$,
(Infin. Dign. p. 157, 158) wo aber, statt der
gen a, b, c, d... hier b, c, d, e... zu setzen wären.

17. Zweytens sey die nach den Potenzen vo
ordnete Reihe

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + g$$
$$+ hz^7 + iz^8 + etc = Z$$

auf die Potenz von dem ganzen positiven Expone
zu erheben.

Auf diese Form läßt sich die allgemeinere,

$$az^{\mu} + bz^{\mu+\nu} + cz^{\mu+2\nu} + dz^{\mu+3\nu}$$

leicht bringen, wenn man $z^{\nu} = u$ setzt, wodurch

$$u^{\mu/\nu}(a + bu + cu^2 + du^3 + etc).$$

Es sey $Z^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$
$$+ Gz^6 + Hz^7 + Iz^8 + et$$

und 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, ꝛc. behalten die in §. 16. ihnen g
Bedeutung.

Die Potenz Z^m besteht aus Partialprodukten
jedes, außer einer Potenz z^n, m Factoren aus d
a, b, c, d, e, etc enthält. Es sind so viele Partial

$= r$ ist. Multiplicirt man die Exponenten β,
jeden mit dem Abstande der zugehörigen Grö
ist, die Summe der Produkte $= n$, z. B. in $a^2 b^4$

Jedes Partialprodukt mit bestimmten Fact
so oft vor, als sich die Factoren versetzen las
§. 16 erwiesen ist. Es ist also der numerisch
zu dem Literalcoefficienten $a^{m-r} . b^{\beta} . c^{\gamma} . d^{\delta} . . .$

$$\frac{m . . . . . (m-r+1)}{1 . . . . r} \times \frac{r . . . . . . 1}{\beta . . . 1 \times \gamma . . . 1 \times \delta . . .}$$

Wenn $\beta + \gamma + \delta +$ etc $= m$ ist, so ist a^{m-r}
es wird kein a zu dem Literalcoefficienten gesetz
numerische Coeffitient oder der Polynomialcoeffi

$$\frac{m . . . . 1}{\beta . . . 1 \times \gamma . . . . 1 \times \delta . . . . 1.}.$$

Es ist also, mit Zuziehung der in §. 12.
nen Zerfällungsarten, am bequemsten der dritt
$A = a^m$
$B = \mathfrak{A}\, a^{m-1} b$
$C = \mathfrak{A}\, a^{m-1} c + \mathfrak{B}\, a^{m-2} b^2$

$+ \mathfrak{E} a^{m-5} (5 b^4 d + 10 b^3 c^2)$

$+ \mathfrak{F} a^{m-6} . 6 b^5 c + \mathfrak{G} a^{m-7} b^7$

$I = \mathfrak{A} a^{m-1} i + \mathfrak{B} a^{m-2} (2 bh + 2 cg + 2 df + e^2$

$+ \mathfrak{C} a^{m-3} (3 b^2 g + 6 bcf + 6 bde + 3 c^2 e + 3$

$+ \mathfrak{D} a^{m-4} (4 b^3 f + 12 b^2 ce + 6 b^2 d^2 + 12 bc^2 d$

$+ \mathfrak{E} a^{m-5} (5 b^4 e + 20 b^3 cd + 10 b^2 c^3)$

$+ \mathfrak{F} a^{m-6} (6 b^5 d + 15 b^4 c^2)$

$+ \mathfrak{G} a^{m-7} . 7 b^6 c + \mathfrak{H} a^{m-8} b^8$

u. s. f.

Herr Prof. Hindenburg bezeichnet den Coeffi
ten der unbestimmten Potenz z^n folgendergestalt:

$$p^m \varkappa (n+1) = {}^m\mathfrak{A} a^{m-1} a \; {}^nA + {}^m\mathfrak{B} a^{m-2} b \; {}^nB$$
$$+ {}^m\mathfrak{C} a^{m-3} c \; {}^nC \ldots + {}^m\mathfrak{N} a^{m-n} n \; {}^n\mathcal{N}$$
$$\begin{pmatrix} b, & c, & d, & e, & f \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots \end{pmatrix}$$

wo p die vieltheilige Größe Z ist; $\varkappa (n+1)$ der Coeffi
des $(n+1)$ten Gliedes der mten Potenz, a^m als das
gezählt; ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C} \ldots {}^m\mathfrak{N}$, die Binomialcoeff
ten zu der mten Potenz; ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC$, ... ${}^n\mathcal{N}$ die V
dungen nach Classen von einer, zwey, drey... nC
sen b, c, d, etc. deren Abstände von a, die der

18. Der Quotient $\frac{(a+bz+cz^2+dz^3}{(a+bz+cz^2+dz^3}$

für welchen p und q ganze positive Zahlen bedeut
sich auf gedoppelte Art finden, wenn $p > q$ ist;
durch unsern polynomischen Lehrsatz; zweytens,
wirkliche Division. Der Quotient sey

$$= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$$

und $(a+bz+cz^2+\text{etc})^q = \alpha + \beta z + \gamma$
und $(a+bz+cz^2+\text{etc})^p = \alpha' + \beta' z^2 + \gamma'$
wo α, β, γ, etc. und α', β', γ', etc durch den
schen Lehrsatz bestimmt werden. Multiplic
$A + Bz + \text{etc}$, mit $\alpha + \beta z + \text{etc}$, so ist das e
Produkt mit $\alpha' + \beta' z + \text{etc}$ eine identische Funk
z von den gegebenen Größen ganz unabhängig
Daher sind die Coefficienten zu derselben Potenz
derseits gleich. Das Produkt ist

$$\begin{array}{lllll} A\alpha & + B\alpha . z & + C\alpha . z^2 & + D\alpha . z^3 & + \\ & + A\beta . & + B\beta . & + C\beta . & \\ & & + A\gamma . & + B\gamma . & \\ & & & + A\delta . & \\ = \alpha' & + \beta' z & + \gamma' z^2 & + \delta' z^3 & + \end{array}$$

Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ aus a, b, c... und
aus jenen bestimmen. Denn man bezeichne die Bin
Coefficienten in der mten Potenz durch ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ^{m}
und die in der nten Potenz durch ${}^n\mathfrak{A}$, ${}^n\mathfrak{B}$, ${}^n\mathfrak{C}$; rc.

$$a^m = \alpha^n.$$
$${}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, b = {}^n\mathfrak{A}\, \alpha^{n-1}\, \beta.$$
$${}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, c + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, b^2 = {}^n\mathfrak{A}\, \alpha^{n-1}\, \gamma + {}^n\mathfrak{B}\, \alpha$$
$${}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, d + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}.2\, bc + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, b^3$$
$$= {}^n\mathfrak{A}\, \alpha^{n-1}\, \delta + {}^n\mathfrak{B}\, \alpha^{n-2}.2\, \beta\gamma + {}^n\mathfrak{C}\, \alpha^{n-3}\, \beta^3$$

u. s. f. Jeder Coefficient aus der einen oder der
Wurzel kommt in diesen Gleichungen, wo er zuer
tritt, in der ersten Potenz vor, und hat daher ein
fachen, immer möglichen Werth. Die Forme
$\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ sind dieselben mit den Formen der
c, d ... das heißt, jene werden aus a, b c ..
dem Exponenten m, auf eine ähnliche Art bes

h) Die Coefficienten A, B, C, D ... eines solchen Quot
(was auch p und q seyn mögen) allgemein zu bestimmen
meine Lokalformel für Potenzen gebrochener Funktionen
der Math. H. II. S. 227, 8). Bestimmte Fälle, für p=
auch für p=o, in meiner Tafel: *Serierum per Series*
(Nov. Syst. Perm. p. LXXVII. seq.) H.

wenn r irgend eine ganze Zahl ist. Demna

Form von $(a + bz + ꝛc.)^r$ einerley mit
$(a + bz + ꝛc.)^{p/m}$.

Der polynomische Lehrsatz nach der zwey
gilt also auch für **positive gebrochen**
nenten.

Oder: die Zerfällung in gleiche Faktoren
ley Form mit der Zusammensetzung aus gleichen
eben so wie eine mit Zusammensetzung verbun
legung.

20. Der Quotient $\frac{1}{(a+bz+cz^2+ꝛc.)^m}$
ley Form mit der Potenz $(a+bz+cz^2+ꝛc.)^m$
Nun kann m auch ein Bruch seyn, ohne daß sic
der Potenz ändert. Die Division stellt allgemei
Form ohne bestimmte Größe dar. Da nun die

Divisors in $\frac{1}{(a+bz+ꝛc.)^m}$ bleibt, es mag m
oder gebrochene positive Zahl bedeuten, so behäl

tient seine Form, und es hat $(a+bz+ \text{ꝛc.})^m$ einerley Form mit $(a+bz+ \text{ꝛc.})^{m/n}$.

Der polynomische Lehrsatz nach der zweyten Form gilt also auch für verneinte Exponenten, ganze und gebrochene.

21. Da der polynomische Lehrsatz für eine nach den Potenzen einer Größe z geordnete Reihe allgemein gilt, die Beschaffenheit des Exponenten der Potenz mag seyn, welche sie wolle, so gilt auch die erste Form für alle Arten von Exponenten, indem man in der zweyten Form nur $z = 1$ zu setzen hat, um die erste Form zu erhalten, in welcher aber noch die Partialprodukte nach den Potenzen von a zu ordnen sind.

22. Der binomische Lehrsatz ist nach der hier gebrauchten Methode ein Corollarium des polynomischen. Will man den binomischen Lehrsatz unmittelbar aus der Natur der Multiplikation, mit Zuziehung der Sätze von den Combinationen herleiten, so wird dieses auf keine Art geschehen können, die man nicht auch für den polynomischen Lehrsatz gebrauchen könnte [i]). Daher wird jener immer als ein besonderer Fall in diesem enthalten seyn. Für Anfänger ist es aber gut, den binomischen Lehrsatz in seiner Allgemeinheit, nach dem hier angewandten Verfahren zu beweisen, und sie dadurch auf den,

i) Sehr wahr; denn für die combinatorische Zeichnung und Entwickelung hat es keinen Anstoß, und ist ganz gleichgültig, ob man statt der Funktion φx und ihrer Potenzen $\varphi^2 x$, $\varphi^3 x$ u. s. w. die einfache Größe bx oder die Reihe $bx + cx^2 + dx^3 +$ etc. und ihre Potenzen setzt (*Nov. Syst. Perm.* p. LIV, 8. und *Infin. Dign.* p. 98, 101); und so läßt sich nichts für $(a + \varphi x)^m$ in der einen Bedeutung von φx erweisen, was nicht zugleich auf die andere geradezu paßte und anwendbar wäre. Die Allgemeinheit des polynomischen Lehrsatzes darzuthun, hat also nicht mehr Schwierigkeit, als die des binomischen; und man kann nun, wie man will, den letzten, wie hier geschehen, von dem ersten ableiten, oder umgekehrt, nach dem gewöhnlichen Herkommen, jenen auf diesen beziehen. H.

nur wegen der weitläufigern Rechnung schwerern, polynomischen Lehrsatz vorzubereiten.

23. Die dritte Form des polynomischen Lehrsatzes, in welcher die Coefficienten von z, jeder durch alle vorhergehenden bestimmt werden, ist durch ihre faßliche Regelmäßigkeit merkwürdig. Sie kann auch zur numerischen Berechnung der Coefficienten sehr nützlich seyn, da gewöhnlich diese nach der Reihe gesucht werden. Diese Form zu finden, sehe man z als eine veränderliche Größe an, und suche Gleichungen zwischen den Veränderungen der Größe z, der vieltheiligen Größe und der Potenz derselben. Da die Form der Coefficienten bey der Veränderung von z bleibt, so wird dieses auf eine Bestimmung der Coefficienten führen.

24. Es sey:

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{etc} = p$$
$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc} = p^m = P$$

die zusammen gehörigen Veränderungen von z, p, P, seyn Δz, Δp, ΔP. In dem Werthe von Δp bezeichne man alles, was das Quadrat von Δz und höhere Potenzen enthält, durch $q\Delta z^2$, eben dieses in ΔP durch $Q\Delta z^2$. Solchergestalt ist

$$\Delta p = b\Delta z + 2cz\Delta z + 3dz^2\Delta z + 4ez^3\Delta z + \text{etc} + q\Delta z^2;$$

$$\Delta P = B\Delta z + 2Cz\Delta z + 3Dz^2\Delta z + 4Ez^3\Delta z + \text{etc} + Q\Delta z^2.$$

Weil $(p+\Delta p)^m = P + \Delta P$, so ist

$$mp^{m-1}\Delta p + \frac{m.m-1}{1.2}p^{m-2}\Delta p^2 + \text{etc} = \Delta P, \text{ oder}$$

$$mp^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}p^{m-2}\Delta p + \text{etc} = \frac{\Delta P}{\Delta p};$$

willkührlich ist; und von den unveränderlichen nicht abhängt.

Demnach ist

$$m\,p^{m-1} = \frac{B + 2Cz + 3Dz^2 + \text{etc}}{b + 2cz + 3dz^2 + \text{etc}}$$

also

$$m\,(A + Bz + Cz^2 + \text{etc.})\quad(b + 2cz + 3dz^2$$
$$= (a + bz + cz^2 + \text{etc.})\,(B + 2Cz + 3Dz^2$$

Weil z von den Größen a, b, c, etc und A, I ganz unabhängig ist, so muß alles, was in dies tenz von z multiplicirt ist, eine besondere Gleichu machen, dadurch erhält man die Gleichungen zur mung von B, C, D, etc aus a, b, c, etc oder auch di jenen. Der erste Theil der Potenz ist $A = a^m$.

Die Gleichungen sind:

I. $mAb = aB.$

II. $m\,(2Ac + Bb) = 2aC + bB.$

III. $m(3Ad + 2Bc + Cb) = 3aD + 2bC$

IV. $m(4Ae + 3Bd + 2Cc + Db) = 4aE$
$+ 2cC + dB.$

u. s. f. Daraus folgt

gen, daß diese sind $\alpha^{m} + m\alpha^{m-1}\beta z$.

25. Wenn Δz und Δp in der gefunde
chung $= 0$ gesetzt wären, so würde dieselbe G
zwischen a, b, c, etc und A, B, C, etc entstehen
dieses Verfahren macht Undeutlichkeit, da es de
lichen Annahme, daß z sich verändern soll, wid
In der That werden auch Δz und Δp nicht =
sondern es ist der Theil der Gleichung, worin
halten sind, ein Aggregat von besondern Gle
Wenn durch die Differentialrechnung die Gränze
tienten $\frac{\Delta P}{\Delta p}$, oder des Verhältnisses $\Delta P : \Delta p$ ges
so werden Δp und Δz als verschwindend behan

26. Man sieht aus dem hier angewandte
ren, daß die involutorische Form des polynomis
satzes, nicht sowohl der Differentialrechnung als
lysis des Endlichen zugehört, welche auch die Ve
gen von z und p endlich seyn läßt, nur daß sie
zu dem gegenwärtigen Zwecke nicht sucht, selbst
Gränzverhältniß braucht. Sie führt sie nur ei

wieder abzusondern, und dasjenige von der Gleichung zwischen der Wurzel und Potenz zu behalten, was von den Veränderungen unabhängig ist. Die Differentialrechnung dient hier nur zur Bequemlichkeit. Die Gränzen der Verhältnisse zu bestimmen, oder anzugeben, wie fern die Verhältnisse der Veränderungen unabhängig sind; das ist der Zweck der Differentialrechnung. Hier ist es nur Mittel, um zu der Bestimmung der Relation zwischen den Coefficienten zweyer Reihen zu gelangen. Wäre kein anderer Weg, die involutorische Form zu finden und allgemein zu beweisen, als durch die Differentialrechnung, so wäre die Analysis des Endlichen kein für sich bestehendes Ganze, und man müßte, um nicht in den Untersuchungen aufgehalten zu werden, einen Theil der Differentialrechnung einschieben.

27. Die Herleitung der zweyten Form aus der ersten, der combinatorischen, ist beschwerlich. Inzwischen wird es wenigstens zur Uebung gut seyn, auch diesen Weg zu versuchen. Man setze in §. 17., der Bequemlichkeit wegen, $a = 1$, so ist für

$$(1 + az + bz^2 + \text{etc})^m = A + Bz + Cz^2 + \text{etc.}$$

$$A = 1\,; \qquad B = \mathfrak{A}b\,;$$

$$C = \mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b^2\,; \quad D = \mathfrak{A}d + \mathfrak{B}.2bc + \mathfrak{C}b^3;$$

$$E = \mathfrak{A}e + \mathfrak{B}(2bd + c^2) + \mathfrak{C}.3b^2c + \mathfrak{D}b^4;$$

$$F = \mathfrak{A}f + \mathfrak{B}(2be + 2cd) + \mathfrak{C}(3b^2d + 3bc^2) + \mathfrak{D}.4b^3c + \mathfrak{E}b^5.$$

u. s. f. Um die Form der Coefficienten, wenn sie durch die vorhergehenden dargestellt werden, zu finden, drücke man die Binomialcoefficienten jeden durch den nächst vorhergehenden aus. Nehmen wir den Coefficienten F, um an demselben die gesuchte Form darzustellen, so ist solchergestalt

$$5F = 5mf + 5(m-1)\mathfrak{A}(be+cd) + 5(m-2)\mathfrak{B}(b^2d+bc^2) + 5(m-3)\mathfrak{C}b^3c + (m-4)\mathfrak{D}b^5.$$

Herleitung unter ihnen selbst Statt finden.
setz zeigt sich an dem gefundenen Coefficienten F
fenbar, ohne Unbestimmtheit und Vieldeutigke
muß daher allgemein seyn [k]).

28. Die combinatorische Form des poly
Lehrsatzes läßt sich auch aus der Vergleichung
hern Unterschiede der Wurzel und ihrer Potenz
aber nicht so einleuchtend, wie unmittelbar durch
binationen.

Es sey

$$x = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc}$$

$$y = x^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + E$$

k) Einen strengen Beweis dieser Allgemeinheit hat
maßen, jedoch mit Beyhülfe der Differentialrechn
Hofrath Kästner (Anal. des Unendl. §. 56) gegebe
Magister Rothe hat die involutorische Eulerisch
Formel für diesen Coefficienten aus einem noch all
Satze, als ein Corallarium, abgeleitet (*Ser. Rev
univers.* §. III. Cor. I. p. 4.). Dieser Lokalsatz, zu
weis Herr R sich der Differentialen in seiner Disse
dient hatte, ist nachher von ihm auf ganz einfache
binatorische Gründe zurückgeführt und gestützt worde

tion von z und Δz, die durch $F^I z + f^I(z, \Delta z)$ be

werde. Solchergestalt ist $\frac{\Delta^n y}{\Delta^n x} = \frac{F^I z + f^I(z,}{Fz + f(z,}$

Da $y = x^m$ ist, so ist $\Delta y = (m x^{m-1} + q \Delta x) \Delta x$
eine Funktion von m, x und Δx ist. Damit man
Unterschied und die folgenden höhern mit den vor
dem Werthe von y, so fern es eine Funktion vo
hergeleiteten Werthen der Unterschiede vergleichen
drücke man x und Δx durch z und Δz aus, u
$\Delta y = (\varphi(m,z) + \varphi^I(m,z,\Delta z))\Delta x$. Dara
$\Delta^2 y = (\varphi(m,z) + \varphi^I(m,z,\Delta z))\Delta^2$
$(\psi(m.z) + \psi^I(m,z,\Delta z))\Delta x$, wo ψ und ψ^I F
nen wie φ und φ^I anzeigen. Auf dieselbe Art w
zusammengesetzt aus $\Delta^3 x$, $\Delta^2 x$, Δx, jedes in ein
tion von m, z und Δz multiplicirt, und $\Delta^n y$ au
$\Delta^{n-1} x \ldots \Delta x$, in Funktionen von m, z, Δz mul
Da die Unterschiedsglieder $\Delta^{n-1} x$, $\Delta^{n-2} x$, etc.
Δz^{n-1}, Δz^{n-2}, etc und durch Funktionen von z
aus der Reihe für x gegeben sind, so erhalten w

einen Werth für $\frac{\Delta^n y}{\Delta^n x}$, welcher eine Funktion

und Δz nebst dem Exponenten m ist. Diesen W

z und Δz nicht $= 0$, als welches mit den gem
nahmen streiten würde; sondern man behandelt
Null, weil die Größen, welche in sie multiplicirt
aufheben. Demnach darf man die endlichen U
hier wie Differentiale behandeln, und hat in den
tialquotienten $z = 0$, also $x = \alpha$ zu setzen.

29. Man setze in dem Differentialquotient
Werth von $z = 0$, so erhält man für Fz folg
the nach der Reihe

$$\frac{dx}{dz} = \beta \quad ; \quad \frac{d^2x}{dz^2} = 1.\,2.\,\gamma\,;$$

$$\frac{d^3x}{dz^3} = 1.\,2.\,3.\,\delta; \quad \frac{d^4x}{dz^4} = 1.\,2.\,3.\,4.\,\varepsilon;$$

u. s. f. Eben so verfahre man mit dem Diffe
tienten $\frac{d^ny}{dz^n}$, so erhält man die Werthe von $F'z$

$$\frac{dy}{dz} = B \quad ; \quad \frac{d^2y}{dz^2} = 1.\,2.\,C\,;$$

$+ \mathfrak{A} x^{m-1} d^3 x;$

$$d^4 y = 1.2.3.4.\mathfrak{D} x^{m-4} dx^4 + 1.2.3.6.\mathfrak{C} x^{m-3}$$
$$+ 1.2.\mathfrak{B} x^{m-2} (3(d^2x)^2 + 4 dx d^3 x)$$
$$+ \mathfrak{A} x^{m-1} d^4 x;$$

u. s. f. Die Werthe von $\frac{d^n y}{d^n x}$ aus diesen Gleichun

die in (28) durch φ (m, z) bezeichneten Functione ist x nicht durch z dargestellt, weil es hier nicht war. Die Differentialquotienten in denselben vorher gefundenen, oder werden aus ihnen unm hergeleitet. Am bequemsten werden alle Differentia dz^n ausgedruckt, worauf mit dz^n durchaus dividi Setzt man nun, wie in (28) vorgeschrieben ward, so ergeben sich die Werthe von B, C, etc. Der We A folgt daher, daß für $z = 0$, $A = \alpha^m$ ist. Es i

$A = \alpha^m.$

$B = \mathfrak{A} \alpha^{m-1} \beta.$

$C = \mathfrak{A} \alpha^{m-1} \gamma + \mathfrak{B} \alpha^{m-2} \beta^2.$

$D = \mathfrak{A} \alpha^{m-1} \delta + \mathfrak{B} \alpha^{m-2} . 2 \beta \gamma + \mathfrak{C} \alpha^{m-3} \beta^3.$

$E = \mathfrak{A} \alpha^{m-1} \varepsilon + \mathfrak{B} \alpha^{m-2} (2 \beta \delta + \gamma^2)$
$+ \mathfrak{C} \alpha^{m-3} . 3 \beta^2 \gamma + \mathfrak{D} \alpha^{m-4} \beta^4.$

u. s. f. Das Gesetz der Formation ist hier schon schwerer zu entdecken, und nicht wohl allgemein zu

sen. Uebrigens gelten diese Werthe für jede Beschaffenheit des Exponenten m, weil hier nur die beiden ersten Glieder der Potenz eines Binomium gebraucht werden.

Colson hat sich auch der höhern Differentiale bedient, aber auf eine andere Art, da er Integrationen gebraucht, wodurch die Sache erschwert wird. Auch hat er nicht erklärt, warum es erlaubt sey, $z = 0$ zu setzen. Hr. Prof. Hindenburg zeigt (*Infin. dign. p.* 56, 57.) nachdem er Colsons Methode vorgetragen hat, wie man hier bequemer den Taylorschen Lehrsatz anwenden könne. Nach meinem Verfahren ist auch dieser nicht nöthig. 1)

30. Für irrationale Exponenten einer Potenz gelten der binomische und polynomische Lehrsatz eben so gut als für rationale, da irrationale Größen Gränzen sind, welchen sich rationale Größen von beiden Seiten ohne Ende nähern, daher was von diesen letztern wahr ist, auch von ihrer Gränze gilt.

31. Wenn der Exponent einer Potenz als eine veränderliche Größe betrachtet wird, so hat dieses

1) Taylor's Theorem ist hier in so fern bequem, weil es die Differenzialen schon so angeordnet enthält, wie sie, durch eine leichte Veränderung, den gesuchten Satz geben. Von dieser Anwendung und ihren Gründen, besonders warum hier z (dort x) $= 0$ zu setzen, meine Abhandlung über Taylor's Satz, seine verschiedenen Formen und Erweiterung (Arch. der Math. Heft II. S. 210, 211). Die Anwendung auf den Satz selbst (S. 212). Bernoulli's, Colson's, Taylor's u. a. Verfahren, und eben so auch die von mir (S. 208.) aus Taylor's Satze abgeleitete Formel, in welcher Combinationsclassen mit höhern Differentialen vermengt vorkommen; führen sämtlich auf Ausdrücke (*Infin. Dign.* p. 52, 55, 57, 67.) solcher Art, wie oben im Texte für A, B, C ... stehen. Diese Ausdrücke nun, und das Bestreben, das, selbst nach Hrn. Klügels und Kästners Urtheile (An. des Unendl. §. 56, XIV.) so schwierige Gesetz ihrer Formation zu entdecken und allgemein zu beweisen, leiteten mich endlich auf den merkwürdigen Lokalsatz (*Infin. Dign.* p. 71 und hier S. 13 Note k) und dieser weiter auf Combinationsverfahren. Dieser Satz enthält die combinatorische Form des polynomischen Lehrsatzes eben so, wie der Kästnerische die involutorische. H.

zuweilen auch, um Rechnungen abzukürzen. Un
Größen dienen, um eine Verwandlung einer Gr
unter gewissen Umständen unmöglich ist, in bloße
senzeichen auszuführen, wofern man nur eine un
Einheit, nämlich $\sqrt{-1}$, annimmt. Z. B. di
$aa+bb$ ist nicht in zwey mögliche Factoren z
wie $aa-bb$, aber doch in die unmöglichen $a+$
und $a-b\sqrt{-1}$. Durch den Gebrauch der unm
Größen erhalten Kreisbogen und Exponentialgröß
ley Form. Es läßt sich nämlich durch Hülfe des
schen Lehrsatzes, ohne Differentialrechnung, zeige

$$e^{+x} = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} +$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} +$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.
andere Zahl als diese Basis, so hat man nur f
setzen den Quotienten von x durch den Modulus
stems. Daher ist

$$e^{x} + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} +\right.$$

ſich auf eine mögliche oder auf eine unmögliche
ziehen, weil die Summe und Differenz $e^x \pm$
Form behalten, es mag die mögliche oder die
Einheit angenommen werden.

33. Zum Schluſſe will ich noch einige Zuſ
Hauptſchrift in dieſer Materie, der ſchon einigen
führten Hindenburgiſchen Abhandlung: Infinitino
tatum hiſtoria, leges et formulae, machen.

I. Es iſt in derſelben die von Herrn von
hoff, in ſeinen Anfangsgründen der Analyſis
Größen (S. 352—363.) gebrauchte Methode
gen worden. Dieſer vortreffliche Mathematiker
den binomiſchen und polynomiſchen Lehrſatz mit
von den Gleichungen. Nachdem er die Form
dukts aus Factoren, wie $x+a$; $x+b$; etc
und es als eine Gleichung dargeſtellt hat, ſetzt er
die Factoren alle gleich, ſo daß die Gleichung lau
Wurzeln hat. Dieſes giebt zugleich eine Po
zweytheiligen Größe mit einem ganzen bejahten
ten (§. 533.). Hieraus ergiebt ſich die Po

vieltheiligen Größe mit einem solchen Exponenten (§. 535.) und zwar in der involutorischen Form der Coefficienten. Die Methode ist im Wesentlichen dieselbe mit der von mir in (24) gebrauchten, nur daß die Rechnung etwas weitläufiger ist, und daß die Veränderung von z (das. S. 355.) gerade zu = 0 gesetzt wird. Dieses kann einen Anstoß geben, weil vorher angenommen ward, z (oder dort x) solle um eine endliche Größe Δz (dort y) zunehmen.[m]) Oder die Methode kommt auf Differenzialrech-

m) Herr von Tempelhoff kommt (Anfangsgr. der Anal. des Unendl. §. 427—429.) noch einmal auf den binomischen Lehrsatz zurück, den er von einem noch allgemeinern Productensatze (§. 425.) ableitet, auf welchen schon vorher Th. Simpson (*Phil. Transf. Vol.* XLVII. p. 20—27.) verfallen war. Auf diesen, aber noch viel weiter erstreckten, Produktensatz hat ganz neuerlich Herr von Prasse die Kräfte der combinatorischen Analysis mit vielem Glücke versucht (Vsus Logarithmorum in Theoria Aequationum. Lipsiae 1796). Der Simpson-Tempelhofische Satz (in der erweiterten Form) kommt daselbst §. XXVII. u. f. vor, und man wird auch hier die Vorzüge des combinatorisch-analytischen Verfahrens vor dem gewöhnlichen mit Vergnügen bemerken, indem hier die Resultate der verwickeltern Form sich weit geschwinder ergeben, als jene der viel einfachern nach der Simpsonischen Analysis.

Hierher gehört auch der Segnerische allgemeine Beweis des binomischen Lehrsatzes (*Nouv. Mém. de l'Ac. Roy de Berlin Année* 1777. *Hist.* p. 37—41), der keine Kenntniß des höhern Calculs voraussetzt, und nicht dem geringsten Anstoß unterworfen ist. Hr. Prof. L'Huilier ist auf denselben Beweis verfallen, in seinem gründlichen Werke (*Princ. Calc. Diff. et Int. Expos. elem. Introd.* p. V—XI.) und hat zugleich (was bey der Segnerischen Darstellung noch vermißt wird) das Gesetz des Fortgangs der Coefficienten des Hauptsatzes (Introd. p. VI—VIII.) noch etwas mehr aus einander gesetzt. Auch Herr Magister Rothe ist, ihm unbewußt, denselben Weg eingeschlagen, und wird seine Behandlung gelegentlich, und vielleicht bald, bekannt machen. Die darin, nach meiner Art ausgedrückten Binomialcoefficienten, mit ihren Relationen, werden zeigen, wie nützlich dergleichen Zeichen sind, kurz und bündig darzustellen, was ohne solche Beyhülfe (wie z. B. selbst bey Herrn L'Huilier a. a. O.) nicht anders als weitläuftig und bey weitem nicht so anschaulich vorgelegt werden kann. Was den Hauptsatz hierbey (die Coefficienten nehmlich des Produkts zweyer binomisch-entwickelten Reihen) anbetrifft, so hat solchen auch Herr Prof. Pfaff (Differ. Investig. ex Theor. Funct. Helmst. 1788. §. XII.) gründlich erwiesen und auf das Neutonische Theorem angewendet. H.

nung hinaus, so wie sie von Hr. Hofr. Kästner in der Analysis des Unendlichen §. 56. angewandt ist. Den Beweis für verneinte ganze und bejahte gebrochne Exponenten eines Binomium führt Hr. von T. so wie Segner in der Analysi Finit. Sect. V et VI.

Ich habe ehemahls (1770) auch einen Beweis des binomischen Lehrsatzes in seiner Allgemeinheit, und des polynomischen, nach der dritten Form, zu geben versucht, in einem Anhange zu meiner analytischen Trigonometrie. Von dem Beweise des erstern für negative ganze Exponenten, habe ich auch hier Gebrauch gemacht. Den polynomischen Lehrsatz leite ich aus der Vergleichung der Coefficienten in den beiden Reihen, $1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc}$, und $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc}$ her, wenn jene zugleich $= (1 + z)^n$ und diese $= (1 + z)^{mn}$ ist. Es kommt darauf an, die allgemeine Form in der besondern sichtbar zu machen.

III. Hr. Prof. Fischer in Berlin gab 1792 heraus: Theorie der Dimensionszeichen, nebst ihrer Anwendung auf verschiedene Materien aus der Analysis endlicher Größen; worin die Erhebung einer vieltheiligen Größe auf eine Potenz mit einem ganzen positiven Exponenten, und auch mit jedem andern, zur Grundlage der angestellten Untersuchungen dient. Wegen der von ihm gebrauchten Bezeichnungsart und Darstellung der zum Grunde liegenden Hauptsätze, ist eine harte Klage gegen ihn erhoben worden. n) Was diese

n) Eine kurze Anzeige, der Kläger und ihrer Klagpuncte, der Beweise und Gegenbeweise, alles ganz summarisch, im Arch. der Math. (H. I. S. 111-119). Eine etwas detaillirtere Anzeige von beiden, mit Beurtheilung, ist in den Recensionen, der Töpferischen Angriffs- und Fischerischen Vertheidigungsschrift (Neue Leipz. gel. Anz. 83. St. 1793. S. 653—659 und Tüb. gel. Anz. 87. St. 1794. S. 689—694) zweyer ganz verschiedener aber auch gleich unpartheyischer Verfasser befindlich, von denen der erste vor Kurzem für die Ausbreitung gründlicher und

betrifft, würde ich, wenn ich in einem gelehrten Gerichte meine Stimme zu geben hätte, den Ausspruch thun: Non liquet; ganz unpartheyisch, da ich mit Herrn Prof. Hindenburg in sehr freundschaftlicher Verbindung stehe, mit Hrn. Prof. Fischer aber in gar keiner. Allein, die Fischerische Bezeichnungsart steht der Hindenburgischen offenbar nach, insbesondere dadurch, daß die Versetzungszahlen der Combinationen (die Polynomialcoefficienten) nicht bezeichnet sind, und daß die Binomialcoefficienten kein Nebenzeichen der Potenz haben, wozu sie gehören. Der Zeiger, den Herr Hindenburg allemahl zusetzt, macht gleich klar, was die zu combinirenden Größen für welche sind, und wie man die in Form eines Exponenten linker Hand des Classenzeichens beygefügte Zahl (den Summenexponenten) zu verstehen habe. Herr Fischer aber hat zweyerley Dimensionszeichen, vollzählige und verkürzte, welches die Sache beschwerlich macht, so, daß eine Reduktionstafel nöthig ist. Man wird auch durch die zweyfache Bezeichnung der Glieder, mit Römischen Zahlziffern und mit Buchstaben, irre. Ein Verstoß von Wichtigkeist ist in dem Ausdruck, Dimensionszeichen, begangen, welcher einen nicht hieher gehörenden Nebenbegriff einmischt. Es ist hier nicht von der Bezeichnung der Dimensionen die Rede, sondern immer von der Bezeichnung der Abstände der Glieder o), die Hr. Fischer durch Marken bezeichnet, wobey er, um recht allgemein zu verfahren, dem Anfangsgliede eine willkührliche Zahl giebt, und die Stellen der übrigen in

nützlicher Kenntnisse in Mathematik und Physik, daran er so thätig arbeitete, viel zu frühzeitig gestorben ist. H.

o) Hieher gehören meine Distanzexponenten, die ich nicht blos, wie hier, für Glieder und Coefficienten polynomischer Größen, sondern allgemein, für jede Reihe von Größen, die eine bestimmte festgesetzte Folge haben, gebrauche. Von den Vortheilen solcher Exponenten in der Anwendung, sehe man die hier (S. 27 in der Note p) angeführten Stellen. H.

arithmetischer Progression fortlaufen läßt. Allein es ist hier gezwungen, wenn man andere Marken, als 1, 2, 3, 4, etc oder 0, 1, 2, 3, ꝛc. gebrauchen will. Es ist Schade, daß Hr. Fischer die Hindenburgischen Schriften vernachlässigt hat. Er würde seinem Werke mehr Ansehen und Brauchbarkeit verschafft haben, wenn er das von Hrn. Hindenburg geleistete zum Grunde gelegt hätte. Den polynomischen Lehrsatz hat er zu flüchtig behandelt, besonders in Absicht auf die Darstellung der möglichen Gattungen von Combinationen. p) Man darf in der Mathematik nie sagen, daß etwas geschehen solle, ohne zu zeigen, wie es geschieht. Berufungen auf den gesunden Menschenverstand, gelten in der Mathematik nicht, wenn man darunter eine undeutliche Vorstellung von Gründen und Regeln versteht. In dem gegenwärtigen Falle hätte Hr. F. sagen sollen, daß, seines Wissens, keine Regel bekannt sey,

p) Nach Herrn Prof. Fischers eigener Erklärung (über den Ursprung der Theorie der Dimensionszeichen ꝛc. §. 50. S. 34.) ist die Idee, die seiner Theorie zum Grunde liegt, ungleich beschränkter als die meinige, einer allgemeinen, in die Analysis einzuführenden combinatorischen Zeichensprache. Herr F. hat zwar in der Vorrede seines Werks (Theorie der Dimens. Zeichen S. V.) meine zweyte Hauptschrift in der Sache, *Nov Syst. Perm. Comb. ac Var.* angeführt; aber alle Umstände, und daß er die darin gegebenen Aussichten gar nicht benutzt hat, machen es wahrscheinlich, er habe die Absicht und den Nutzen dieser Schrift ganz verkannt, habe vielmehr geglaubt, durch eine vorgängige Theorie der Combinationen, werde die Sache ohne Noth weitläuftiger, sie lasse sich, auf die von ihm aufgestellte Art (die, in Absicht der zum Grunde gelegten Hauptsätze und ihrer Behandlung, über meine erste Schrift, *Infin. Dignit.* und die Eschenbachische *Ser. Revers.* nicht hinausgeht) weit kürzer behandeln und abthun. Unter den Umständen mußte also Herr Prof. Fischer die Darstellung der möglichen Gattungen von Combinationen, die Herr Prof. Klügel bey ihm vermißt, nothwendig übersehen, sie konnte ihm sogar nicht einmal einfallen, da sie so ganz außer seinem Plane lag. Ich selbst habe diese möglichen Gattungen von Combinationen (bey den verschiedenen combinatorischen Operationen) in meinen *Infinit. Dignit.* noch nicht in Betrachtung gezogen; und von diesem, von Herrn F. nicht angeführten, Werke, und jener Eschenbachischen Schrift, kann eigentlich nur bey jenen Beschuldigungen wider ihn, die Rede seyn. H.

nen geliefert. Beide Formen des Theorems sind d
§. 17. entwickelten. Der Unterschied derselben, so w
dortigen dritten, liegt bloß darin, wie die Combinat
gefunden und geordnet werden. q) Darauf gründe
die verschiedene analytische Zeichnung derselben, w
Hr. Prof. Hindenburg giebt.

q) Es sind dieselben zusammengesetzten Größen, nur in ve
denen Formen dargestellt. In wie fern die hier angefü
und andere ähnliche, Formen für einander substituirt w
können, oder nicht, und wie diese oder jene vorzugsw
oder auch wohl ausschließlich vor andern, zu brauche
darüber beziehe ich mich auf das, was ich in meiner
Folge vorkommenden Abhandlung hier und da, nnd no
Schlusse derselben, im Allgemeinen gesagt habe. H.

III.

Coefficient des allgemeinen Gliedes jeder willkührlichen Potenz eines Infinitinomiums; Verhalten zwischen Coefficienten der Gleichungen und Summen der Produkte und der Potenzen ihrer Wurzeln; Transformation und Substitution der Reihen durch einander;

von

Christian Kramp,

der Arzneykunde Doktor, des Herzogl. Zweybr. Oberamts so wie der Stadt Meissenheim Physikus, der herzoglichen Lande Hebammenmeister.

Historische Vorerinnerung des Herausgebers.

Ich habe mit Herrn Doktor Kramp, dem Verfasser der Geschichte der Aërostatik und der in Gesellschaft von Hrn. Bekkerhinn herausgegebenen Krystallographie des Mineralreichs, so wie anderer mit verdientem Beyfall aufgenommenen Schriften, einen vieljährigen ununterbrochenen Briefwechsel unterhalten. Herr K. hat mir bey der Gelegenheit von Zeit zu Zeit verschiedene mathematische Aufsätze zur Bekanntmachung zugesendet, davon ich bereits einige mitgetheilt habe [a]), die übrigen theils hier beybrin-

a) „Kramp's Versuch, die Natur der bisher bekannt gewordenen Sterblichkeitstafeln durch einfache Gleichungen zu bestimmen." (Leipz. Mag. für reine u. ang. Math. 1787. S. 129—176); „Dess. Entwurf einer vortheilhaften Einrichtung öffentlicher Leibrenten-Cassen" (Ebend. 1788. S. 1—46). Eine Abhandlung Herrn Kramp's „über den Mittelpunkt der Schwere des sphärischen Dreyecks," und eine andere: „Geometrische

laßten Herrn D. Kramp seit einigen Jahren, den
von Untersuchungen, wovon seine vorlängst noch in
burg herausgegebene gelehrte und scharfsinnige Prob
de vi vitali arteriarum, addita nou
febrium indole generali coniectura (
die ersten Spuren und Anlagen enthält, wieder au
men; über Kreislauf des Bluts, Lebens
der Gefäße und Fiber, weiter nachzudenke
versuchen, in wiefern sich, durch Beyhülfe der h
Mechanik und Dynamik, die Grundgesetze au
lassen, welche die hier thätigen Kräfte in ihren Wirkun
terworfen sind; in der Erfahrung endlich nachzusehen,
wie weit sich die von wiederholt angestellten Beobach
abstrahirten und durch sichere Schlüsse weiter gefo
Sätze bestätigen, und glücklicher Gebrauch davon in d
xis sich machen lasse. Das Resultat dieser Untersuch
hat Herr D. Kramp in seiner Fieberlehre
mechanischen Grundsätzen (1794) und
Kritik der praktischen Arzneykunde (
vorgelegt, in der festen Ueberzeugung — die bis

Analysis des Krystalls, Hyodon genannt" (eine Wid
des Systems von Haüy) werden in den nächstfolgend
ten des mathem. Archivs erscheinen. Hindenburg.

chrift,
a de
785),
zuneh-
raft
; zu
hern
finden
en un-
ob und
ungen
gerten
r Pra-
ungen
nach
n der
1795)
er bey

rlegung
en Heb

b) Herr D. Kramp bot mir einmal, wenn eine p
Abhandlung für mein mathematisches Magazin
fremd wäre, eine Reihe von 150 meist neuer (von
nicht angestellter) Versuche über das Blut zum
an. Den Beobachtungsgeist Hrn. D. Kramp's
fentlich die (für die Ostermesse 1796 angekündig
Schriften: Sammlung medicinisch pr
Beobachtungen und der Arzt, als Ge
fer, näher bewähren. H.

*) Ich bin weit entfernt, mir ein absprechendes Urth
ßen, da ich weder theoretischer, noch weniger pra
bin; aber erlaubt wird mir es seyn, hier anzuführe
D. Kramp von dem fordern kann, der sein neues
widerlegen will.

Die Reihe seiner Lehrsätze mit Erfolg anzug
aus vollwichtigen Gründen zu erschüttern, müßte
wohl den nähmlichen Weg einschlagen, den der Erf
gen ist, ihn Schritt für Schritt darauf verfolgen,
gen, wo und wie er gefehlt habe.

Es müßte daher bewiesen werden (wegen de
Zeichen und ihrer Bedeutung sehe man den Anhang
der Krit. der prakt. Arznk. S. 180 u. f)

1) Daß das große Fundamentalgesetz der höh
nik, $du = Pdt$, in gegenwärtigem Fall
Lebenskräften die Frage ist, nicht weiter ann
könne; also auch die Gleichung $du = -Pdt$ f
den Kreislauf angewendet, falsch sey.

2) Daß $du = 0$, oder, gleichförmige B
Blutes, keine zum gesunden Zustande und

Anhäufung des venösen Systems, im andern der
auf eine widernatürliche Anfüllung der A
übereilt und unrichtig sey.

Einem vorurtheilfreyen wahrheitliebenden Mann
beyder Wissenschaften, als Theoretiker und Praktiker
kundig, den ganzen Ideengang des Erfinders, Sch
Schritt noch einmal verfolgte, und nun zeigte, an w
Stellen seine Schlüsse, in der Theorie zwar richtig, in d
übung aber unrichtig wären — einem solchen
würde Herr D. Kramp gewiß unendlich verbunden se

Aber was soll man dazu sagen, wenn man sogar d
„Wenn die Lebenskraft der Gefäße gleich ist der Sum
„Hindernisse, so ist die Bewegung des Bluts gleich
als einen falschen, dem gesunden Menschenverstande s
wider laufenden, ausgeben sieht? Ist denn das so wa
greifliches, daß da, wo Kraft und Widerstand einand
sind, gleichwohl Bewegung seyn könne? und ist das n
Fall z. B. bey der Bewegung fallender Körper im
stehenden Mittel, die aus einer beschleunigten in di
förmige übergeht, sobald die von der Kraft der Schw
rührende Gewalt zu sinken dem Widerstande gleich wir
der Körper bey seiner Bewegung die vitesse comp
wie sie die Franzosen nennen, erreicht hat. H.

d) Ich kann nicht umhin, aus einem seiner Briefe aus G
v. v. Jahre folgende Stelle mitzutheilen: „Die viel
herum eingerissenen Epidemien beschäftigen mich seh
schlechtes feuchtes Wetter, mit schnell abwechselnder
und Kälte, viel Azote aus Afrika und gleich darauf wied
gene aus Skandinavien! Was will daraus werden?
lebe itzt wie Hippokrates in Thessalien: den T
von einer Stadt zur andern wandernd, des Abends
Krankheitsgeschichten und Aphorismen aufschreibend;

Ich hoffe, man wird diese kleine Abschweif
verzeihlich finden, um so mehr, da ich es meinem
schuldig zu seyn glaubte, bey der so ganz genauer
niß, die ich von seiner Lage habe, und bey der g
legenheit, die sich mir zeigte, wenigstens so viel da
zu sagen, als in den wenigen Zeilen des Textes
zugehörigen Anmerkungen steht. Ich kehre wi
Hauptsache zurück.

Den Beyfall abgerechnet, den meine beyd
Schriften im combinatorisch-analytischen Fache
Dignit. Hist. leges ac formulae und
Syst. Perm. ac Var.) gleich bey ihrer ersten
nung (1779 und 1781) fanden, war Herr D.
von auswärtigen Gelehrten, (die also die Sache
mittelbar von mir oder durch meine mündlichen

müßigen Stunden an einem langen mathematisch
fortarbeitend, von dem ich Ihnen künftig noch oft
schreiben werde." (Das angefangene große Werk übe
ben; mehr davon in der Folge). H.

hatten kennen lernen) der Erste, und, ich muß sagen, auch mehrere Jahre hindurch, der Einzige, der den großen Umfang und ausgebreiteten Nutzen der engsten Verbindung der Combinationslehre mit der Analysis sogleich anerkannte und sich sehr nachdrücklich darüber gegen mich erklärte. Da ich seinen schriftlichen Aufmunterungen es vornehmlich verdanke, daß ich, bey der wenigen Sensation, die übrigens die Sache in der Folge machte, in der Stille für mich (so weit es die sich immer mehr häufenden Geschäfte ganz andrer Art verstatteten) weiter gegangen bin: so wird es mir erlaubt seyn, hier noch Einiges davon beyzubringen.

Es ist etwas über zehn Jahre, daß Herr D. Kramp meine Theorie der combinatorischen Analysis und ihre ersten Anwendungen auf die Reihen, hat kennen lernen. Ohne sie erst methodisch, nach den dabey von mir aufgestellten Zeichen, Operationen und Sätzen, zu studiren, übersah er sogleich die Wichtigkeit der Sache, und äußerte (im April 1786), da er eben im Begriffe war, zu einer vorhabenden französischen Uebersetzung der Eulerischen Introductio in Anal. Infin. in zwey Bänden, die Erläuterungen und Beyträge in einen dritten Band zu sammeln, daß er darin, (um seine eigenen Worte zu gebrauchen) meine ganze Combinationstheorie mit unter diejenigen Erweiterungen der Analysis aufnehmen werde, die als die merkwürdigsten unter allen, als eine Fortsetzung des Eulerischen Werkes, erscheinen könnten [e]).

[e]) Herr Pezzi hatte die Uebersetzung des ersten Theils übernommen, Herr D. Kramp wollte den zweyten (geometrischen) übersetzen und Beyträge und Erweiterungen in einem dritten Bande nachliefern. Der erste, von Hrn. Pezzi besorgte Band, ist auch (1786) wirklich erschienen; da aber dieser, sowohl in Absicht auf Uebersetzung als Anmerkungen, auch wegen eigenmächtiger Weglassung vieler Absätze des Originals, den Beyfall des Publikums ganz verfehlte (Herr K. klagt laut darüber in seinen Briefen), so trug die Verlagshandlung, und

In Absicht auf diesen schnellen Ueberblick des Werthes und Nutzens der Combinationsverfahren in der Analysis, befand sich damals Herr Kramp in demselben Falle mit Leibnitzen. Dieser, so wie ihm der glückliche Einfall zuerst gekommen war, versuchte die Anwendbarkeit desselben in einigen Beyspielen, und entschied sogleich den Werth der Sache auf eine absolute Art — ohne erst die Gründe und Hauptsätze, nebst den dafür nöthigen Zeichen und Operationen, aufzusuchen, wodurch er die Vortheile, die sich dadurch schaffen lassen, auch Andern verständlich hätte vorlegen und begreiflich machen können [f]). Leibnitz hat gleichwohl von der Sache in der Folge fast nie anders, als mit Enthusiasmus gesprochen [g]).

eben so auch Hr. D. Kramp, Bedenken, das Unternehmen fortzusetzen. H.

f) Dieser Umstand ist gleichwohl der guten Sache in der Folge nachtheilig gewesen. Konnte doch Leibnitz den wichtigen Einfluß der Combinationslehre auf die Analysis, bey einer sehr verwickelten Aufgabe (*Infin Dign. Praef. p.* xv-xviii.) seinem Freunde Joh. Bernoulli nicht begreiflich machen. Er hatte die Sache mit den Augen des Verstandes bis auf den Grund durchschaut, aber es fehlten ihm schickliche Worte und Zeichen, sich deutlich darüber auszudrücken. (*Nov. Syst.* p. xvi. not. q, Toepf. comb. Anal. S. 41-44); und so gingen auch Boscovich's und Cramers nachher gelieferte trefliche Proben, für die Wissenschaft verloren. Der Zufall hatte sie herbeygeführt; es waren Bruchstücke eines unbekannten Ganzen, einzelne Aeste eines großen sehr ausgebreiteten Baumes, von dem man Stamm und Wurzel nicht zu finden wußte. Ganz natürlich also — euenit, quod rebus humanis solet: res ignota despicatui primum habita, post est adducta in obliuionem, et regionibus analyticis hac parte gravis rursus incubuit nox (*Nov. Syst. Perm. Praef.* p. ix).

H.

g) Ich rede hier nicht von Leibnitzens Aeußerungen über die Analysin axiomatum und das Alphabetum cogitationum humanarum, die er von einer, auf die Combinationslehre zu gründenden, Analysi suprema erwartete; Aeußerungen — die in einigen Stellen nahe an Schwärmerey gränzen. Ich verstehe blos die natürlichen Ausbrüche von Bewunderung, welche die entzückenden Aussichten in ein neues Land ihm veranlaßten, das er im Geiste schon

unter diesen auch die interessante Nachricht (vom
1795) wegen eines seit einiger Zeit bereits ange
großen Werkes über unendliche Reihen, mit Zuzie
Analysis des Unendlichen und in Verbindung mit
binationslehre. Dahin gehören unter andern:
meinen Gesetze der Reihen, die aus der Entwicke
$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \cdot \cdot \frac{d^ny}{dx^n}$ entstehen; gegebene
che Reihen auf jede beliebige Funktion zu erhe
Auflösung aller nur gedenkbaren algebraischen
scendenten Gleichungen durch unendliche Reihen
men, und zugleich die beständigen Gesetze ihrer
ten anzugeben; eine allgemeine, von der Entwick
Denominators unabhängige Theorie der recurrire
hen aufzustellen; eben so auch eine allgemeine
der Equations aux differences finies,
tution, Transformation, Reversion der Reihen;
tion unbekannter Größen aus gegebenen Gl
u. s. w. [h]).

ganz durchreist hatte, und das nur noch für And
terra incognita war. Mehrere Stellen be
habe ich hier und da in meinen Schriften angefüh

h) Es kann nicht fehlen, daß Herr D. Kramp auf m

mir und Andern schon Bearbeitete und Gesagte treffen
Ohne eine umständliche Nachweisung darüber zu geben
ich hier nur im Allgemeinen erinnern: 1) daß, was übe
die Anwendung der Differentialausdrücke $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$:
auf die Reihen anbetrifft, die Hauptsätze allgemeiner Di
zen und Summen, nebst Taylors Satz, beyde nach
Darstellung, so wie mein allgemeines Produktenproblem
gleichen Herrn M. Rothens Lokalformeln für höhere
renziale und Herrn Prof. Pfaff's allgemeine Summen
(die sämtlich im math. Arch. B. I. befindlich sind) seh
Dienste hierbey leisten können. Auch ist neuerlich Hrn.
L'Huilier's sehr schätzbares Werk; *Princ. Calc. differ.*
tegr. expos. elem. (1795) erschienen, das viel hieher ge
Sätze und Aufgaben enthält. 2) Meine combinatorisch
lösung der recurrirenden Reihen ist bekannt.
Syst. Perm. p. LXXVIII. seq. vergl. mit *Infin. Dign. p.*
dort. Anm.) Eine neue Methode, das allgemeine Glied
Reihen zu finden, von Herrn Trembley zu Berlin, ha
vor Kurzem zum Einrücken erhalten. 3) Ferner gehören
mehrere einzelne, im Archive nicht befindliche Abha
gen von mir, und den Herren Eschenbach, Toe
Rothe, v. Prasse. H.

i) Ich habe Herrn D. Kramp neuerlich sämtliche com
torisch-analytische, von mir und Andern herausgeg
ältere und neuere, Schriften und einzelne Aufsätze nach
heim übersendet, und von daher zurück mehrere schriftlic
sätze ähnlicher Art von ihm zum Einrücken fürs Archiv
ten. H.

„les, was die Combinationslehre betrift; überzeugt, daß „durch die weitere Aufklärung derselben unserer ganzen „höhern Mathematik noch eine Revolution bevorsteht, die „der durch die Infinitesimalrechnung bewirkten wenigstens „gleich zu setzen ist. — Ich habe gefunden, daß die ganze, „bisher für unmöglich gehaltene, allgemeine Auflösung der „Equations aux differences finies auf der „Combinationslehre beruhe" — k).

Herr D. Kramp scheint erst neuerlich (um 1794) mit der neuen Theorie der Reihen, in der oben angezeigten Maße und Absicht, sich ernstlich beschäftigt zu haben. Er hat, wie er mir schreibt, in seinen müßigen Stunden vieles darinn theils angefangen, theils vollendet, wobey, wie er zugleich bemerkt, wegen seiner Lage, und daß er ohne alle gelehrte Hülfsmittel gearbeitet, es nicht fehlen könne, er werde manches sagen, was schon gesagt worden sey; manches aber werde doch, wie er hoffe, ganz neu seyn. Um meine Leser in Stand zu setzen, selbst davon urtheilen zu können, will ich Einiges von dem, was er mir zugeschickt hat, so viel der Raum verstattet, mit seinen eignen Worten hier aufführen.

Hindenburg.

Heppenheim, den 14. Jun. 1795.

„Ew. — empfangen hiermit einige Lehrsätze über „die Coefficienten, des allgemeinen Gliedes der Potenz ei-

k) Etwas Aehnliches von der Bezeichnung der differences partielles nach Fontaine, und daß das Gesetz der dabey vorkommenden Δx, Δy und dx, dy und ihrer Potenzen, durch einzelne Glieder von Variationsklassen sich ausdrücken, und dadurch der Fortgang für andere Glieder, und so viel veränderliche Größen als man will, leicht angeben lasse; habe ich (Arch. d. Math. S. 216) erinnert. Auch der Variationscalcul hat große und nachdrückliche Unterstützung von der Combinationslehre in der Folge zu erwarten. H.

„nes Infinitinomiums, so wie der Gleichungen und die „Summen der Potenzen ihrer Wurzeln, weiter ausge„dehnt, wenn ich nicht irre, als es gewöhnlich geschieht. „Ich muß es Ihnen ganz überlassen, zu beurtheilen, ob „die Sätze neu sind, und ob sie in Ihr mathematisches „Archiv eingerückt zu werden verdienen. Seit etwa 8 „Jahren habe ich kaum ein mathematisches Buch ansehen „können. Ihre lehrreichen Schriften über das Infiniti„nomium (Infinit. Dignitat.) und die Combinations„lehre (Nov. Syst. Perm. Comb. ac Var.), die Sie „mir noch vor meiner Abreise nach Paris schickten, hatte „ich damals nicht, und nachher noch viel weniger, Zeit „durchzugehen; und was Sie seitdem mir zu übersenden „die Güte hatten, erhielt ich gar nicht auf den vielen „Wanderungen, die den Ort meines Aufenthalts immer „ungewiß machten. Vorzüglich vermuthe ich von dem „allerersten Satze (1, 2, 3), daß er, seiner Einfachheit we„gen, schon lange nicht mehr neu seyn kann [1]); und ich „schäme mich gewissermaßen, ihn itzt erst, etwa vor ein „paar Tagen, entdeckt zu haben. Finden Sie, daß „meine Arbeit gut ist, so stehen Ihnen mehrere Abhand„lungen ähnlicher Art zum Einrücken in Ihre periodische „Schrift zu Diensten“ —

Kramp.

1) Ueber den ersten Erfinder dieses merkwürdigen Satzes, meine *Infin. Dign.* §. XII. Die verschiedenen Gestalten desselben; ebend. §. XIII. Der Ursprung des Coefficienten, den dieser Satz finden lehrt, ist combinatorisch, und in so fern ist er mit der Versetzungszahl (numerus permutationum) gegebener Dinge einerley (*Moivr. Misc. Anal. p.* 218). Als solche, gehört sie zugleich dem allgemeinen Potenzgliede $A^p B^q C^r D^s$ ... zu (man sehe 1 und 2 auf der folgenden Seite) und so habe ich dieser Zahl (die Hr. Kramp in der Folge mit K bezeichnet) vorlängst den analytischen Namen Polynomialcoefficient gegeben (*Nov. Syst.* IX, 24 u. XI, 10).

$s\,(s-1)\,(s-2)\;.\;.\;.\;3.\,2.\,1. =$

so ist $K = \dfrac{m'}{p'q'r's'etc}$

3. Zusatz. Da $m = p + q + r + s$
läßt sich m' durch jedes der Produkte p', q',
dividiren. Gesetzt also, die größte der Zah
s, etc sey p, so ist der kürzeste Weg, den Co
ficienten K zu finden, folgender: man dividir
dukt $m\,(m-1)\,(m-2) \ldots (p+2)\,(p+1)$ durch

4. Aufgabe. Das Infinitinomium ax
$cx^{\gamma} + dx^{\delta} +$ etc soll auf die Potenz des Ex
erhöht werden. Man verlangt den Coeffici
allgemeinen Gliedes x^{ω}.

5. Auflösung. Man setze $ax^{\alpha} = A$
$cx^{\gamma} = C$, $dx^{\delta} = D$, etc. Der Sinn der
fordert, die Exponenten p, q, r, s etc, so zu
daß $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s +$ etc $= \omega$, z
$p + q + r + s +$ etc $= m$ werde [m]. Außer

m) Man sehe meine Schlußerinnerung am Ende
lung. H.

$$p + q + r + s = 24$$

$$3p + 5q + 7r + 10s = 120;$$

also $2p = 2r + 5s$; und $2q = 48 -$

Zuerst also muß s eine gerade Zahl seyn.

läßt die Ausschließung der verneinten Werthe (

dern Voraussetzungen für s zu, als o, 2, 4,

8. Für $s = o$, sind für r keine andern Vo

gen erlaubt, als die Reihe der natürlichen Zah

bis 12. Ueberhaupt also 13 mögliche Ver

und diese sind mit den dazu berechneten Coeffi

s	r	q	p		K
o.	o.	24.	o.	. . . . . .	.
o.	1.	22.	1.	. . . . . .	.
o.	2.	20.	2.	. . . . .	(
o.	3.	18.	3.	. . . . .	26
o.	4.	16.	4.	. . . .	514
o.	5.	14.	5.	. . . .	4942
o.	6.	12.	6.	. . . .	24986

2.	4.	9.	9 . . .	981608628
2.	5.	7.	10 . . .	1413516424
2.	6.	5.	11 . . .	899510451
2.	7.	3.	12 . . .	214169155
2.	8.	1.	13 . . .	12355912

10. Die Voraussetzung s = 4, giebt sechs
liche Verbindungen. Sie sind mit ihren Coefficient

s	r	q	p	K
4.	0.	10.	10 . . .	19632172
4.	1.	8.	11 . . .	160626866
4.	2.	6.	12 . . .	374796021
4.	3.	4.	13 . . .	288304632
4.	4.	2.	14 . . .	61779564
4.	5.	0.	15 . . .	1647455

11. Die beyden Verbindungen für s = 6 si

s	r	q	p	K
6.	0.	3.	15 . . .	1098303
6.	1.	1.	16 . . .	411863

Summe der Produkte von Vier zu V
$ZYXV + etc = D$ etc.

2. Lehrsatz. Die Reihe

$Z^0 + Y^0 + X^0 + V^0 + etc$ ist eine zurückl
$Z^1 + Y^1 + X^1 + V^1 + etc$ Reihe (Series
$Z^2 + Y^2 + X^2 + V^2 + etc$ rens) und hat
. . . . . le + A--B+C--

3. Beweis. $Z^n + Y^n + X^n + V^n +$ e
allgemeine Glied der Reihe, die sich aus der Div
$(1-Z)(1-Y)(1-X)(1-V)$ etc entwickelt. Die
Produkt aber ist nichts anders, als $1-A+B-C$
Folglich etc.

4. Dem zufolge sind die Summen der
zweyer Größen, wie folget:

$Z^0 + Y^0 = 2$
$Z^1 + Y^1 = A$
$Z^2 + Y^2 = AA - 2B$
$Z^3 + Y^3 = A^3 - 3AB$

Z, Y, X.

$$Z^0 + Y^0 + X^0 = 3$$

$$Z^1 + Y^1 + X^1 = A$$

$$Z^2 + Y^2 + X^2 = AA - 2B$$

$$Z^3 + Y^3 + X^3 = A^3 - 3AB + 3C$$

$$Z^4 + Y^4 + X^4 = A^4 - 4A^2B + 4AC + 2BB$$

$$Z^5 + Y^5 + X^5 = A^5 - 5A^3B + 5A^2C + 5AB^2 - 5BC$$

$$Z^6 + Y^6 + X^6 = A^6 - 6A^4B + 6A^3C + 9A^2B^1 - 12$$

$$- 2B^3 + 3CC.$$

$$Z^7 + Y^7 + X^7 = A^7 - 7A^5B + 7A^4C + 14A^3B^2 - 2$$

$$- 7AB^3 + 7AC^2 + 7BBC$$

$$Z^8 + Y^8 + X^8 = A^8 - 8A^6B + 8A^5C + 20A^4B^2 - 3$$

$$- 16A^2B^3 + 12A^2C^2 + 24AB^2C + 2B^4 -$$

$$Z^9 + Y^9 + X^9 = A^9 - 9A^7B + 9A^6C + 27A^5B^2 - 45$$

$$- 30A^3B^3 + 18A^3C^2 + 54A^2B^2C +$$

$$- 27ABC^2 - 9B^3C + 3C^3.$$

$$Z^{10} + Y^{10} + X^{10} = A^{10} - 10A^8B + 10A^7C + 35$$

n) Ich habe hier im Texte, statt der auf gewöhnliche A
n ausgedrückten Binomial-Coefficienten, meine abk
Zeichen n-3A, n-4B, n-5C u. s. w. (hier S. 66 *) gebrau
das Fortgangsgesetz deutlich vor Augen legen. H.

ABC
A^2BC
A^3BC
$BCC.$
A^4BC
AB^4
A^6B^2
t durch
renden
ht, die

$-12ABC - 2C^3 + 6BD + 3CC$

$Z^7 + Y^7 + X^7 + V^7 = A^7 - 7A^5B + 7A$

$-7A^3D - 21A^2BC - 7AB^3 + 14$

$+7BBC - 7CD.$

$Z^8 + Y^8 + X^8 + V^8 = A^8 - 8A^6B + 8A$

$-8A^4D - 32A^3BC - 16A^2B^3 + 24A^2$

$+24AB^2C - 16ACD + 2B^4 - 8B^2D -$

$Z^9 + Y^9 + X^9 + V^9 = A^9 - 9A^7B + 9$

$-9A^5D - 45A^4BC - 30A^3$

$+18A^3C^2 + 54A^2B^2C - 27A$

$-27AB^2D - 27ABC^2 + 9ADD - 9$

$+3C^3.$

$Z^{10} + Y^{10} + X^{10} + V^{10} = A^{10} - 10$

$+35A^6B^2 - 10A^6D - 60A^5$

$+50A^4BD + 25A^4C^2 + 100A^3$

$+25A^2B^4 - 60A^2B^2D - 60A^2$

$-40AB^3C + 60ABCD + 10AC^3$

$+15B^2C^2 - 10BD^2 - 10C^2D.$

— — —

7. Und nun die Summe des allg

$Z^n + Y^n + X^n + V^n + U^n + T^n +$ etc du

E, F, etc ausgedrückt. Dies beruht auf folgenden Regeln:

a) Der Größen A, B, C, D, E, F, etc müssen eben so viele seyn, als der Größen Z, Y, X, V, U, T, etc selbst sind.

b) Die Größen A, C, E, etc sind alle bejaht; die Größen B, D, F, etc verneint. Aus den Zeichen der Faktoren erkennen sich die Zeichen der Produkte.

c) Die einzelnen Glieder der Reihe $Z^n + Y^n + X^n + V^n +$ etc sind von der allgemeinen Form $A^p B^q C^r D^s$ etc. Die Exponenten p, q, r, s, etc. sind durch die Gleichung bestimmt: $p + 2q + 3r + 4s +$ etc $= n$; und dann durch die Bedindung, daß p, q, r, s, etc. ganze bejahte Zahlen, oder auch o seyn müssen.

d) Der Coefficient eines solchen Gliedes $A^p B^q C^r D^s$ etc, ist allemal gleich, dem Zahlen-Coefficienten K desselben (S. 102,2 und Note l) mit n multiplicirt, und durch $+ p + q + r + s +$ etc dividiret; oder

$$= \frac{nK}{p+q+r+s+\text{etc}} = \frac{nK}{m},$$ wenn man (wie S. 102,5) $p + q + r + s + t +$ etc $= m$ setzt.

8. Anm. 1. des Herausg. Die hier vorkommende Reihe (2, 3) ist eine Series recurrens pura, und man findet durch Beyhülfe der so einfachen Scale $+ A - B + C - D \ldots$ ein Glied nach dem andern, aus den vorhergehenden, in A, B, C, D . . . ausgedrückt (4, 5, 6). So leicht dies Verfahren an sich ist, so wird es doch, bey mehrern Größen Z, Y, X, V, T, S . . . und einem etwas größern Werthe von n, weitläuftig, selbst, wegen der öftern Recurrenz und der Reduction der Zahlen, in der Folge beschwerlich. Es giebt aber, was man bey einem so äußerst simpeln Verfahren, als das eben angeführte ist, nicht denken sollte, gleichwohl noch ein ande-

res, ungleich viel leichteres und geschmeidigeres — eine combinatorische Involution — die das Vorhergehende für das Gegenwärtige auf einmal darstellt, und für das Folgende sogleich weiter (durch bloßes Anfügen) bearbeitet werden kann. Von dieser Involution in meiner Abhandlung, am Ende dieser Schrift.

Anm. 2. Zu diesem Satze schickte mir Herr D. Kramp, aus Mannheim (den 5. Septbr. 1795) einen Pendant, den er, nebst einigen andern beygefügten Aufgaben, etwas anders dargestellt (von Ebendaher d. 3. May 1796) wiederholte. Nach dieser letzten Darstellung will ich den Satz hier aufführen, und noch ein paar andere, mir von ihm mitgetheilte, beyfügen.

III. Aufgabe.

1. Es sey einerseits

$+ A'$ die Summe der Größen $Z + Y + X + W + V + U +$ etc
$- B'$ die Summe ihrer Produkte ex binis
$+ C'$ die Summe ihrer Produkte ex ternis
$- D'$ die Summe ihrer Produkte ex quaternis
. . . . .
$\pm \mathfrak{N}'$ die Summe ihrer Produkte ex (n)tis °)

Andererseits sey
$+ A,$ die Summe der Größen $Z + Y + X + W + V + U +$ etc
$- B,$ die Summe der Quadrate dieser Größen
$+ C,$ . . . Würfel . .
$- D,$ . . . Biquadrate . .
etc etc etc

°) Es werden hier, wie im Vorhergehenden (105, 1) Combinationen ohne Wiederholungen (non admissis repetitionibus) verstanden, deren Classen ich durch $A', B', C', D' \ldots \mathfrak{N}'$ ausdrücke (*Nov. Syst. Perm. p.* xx.). H.

bejahten Zahlen bestimmt. Es ist ferner der K[…]
wegen angenommen $m = p + q + r + s +$ etc und […]
Buchstaben m', p', q', r', s' etc behalten die oben (102[…]
angegebenen Werthe.

2. Anm. Der erste dieser beiden Sätze läßt sich […] der Bemerkung herleiten, daß die Reihe $+ A - B + C -$ […] $+$ etc eine recurrirende Reihe ist, die zur Scale […] $+ A', - B', + C', - D' +$ etc. Er läßt sich aber a[…] aus dem Logarithmus des Infinitinomiums, vermit[…] der Combinationslehre, ohne alle Induction, […] mathematischer Schärfe, beweisen. So erweißt ihn H[…] von Prasse (Usus Logarithmorum Infiniti[…]mii in Theoria Aequationum. Lips. 179[…] nur daß er den Beweis viel kürzer hätte abfassen könn[…] Es war nemlich zu dieser Absicht vollkommen hinläng[…] anzunehmen: $(1 + Zx)(1 + Yx)(1 + Xx)$. […] $= 1 + A'x - B'x^2 + C'x^3 - D'x^4 +$ etc. p)

p) Herr von Prasse hat diesen Satz, der bey ihm gefolg[…] wird, nicht annehmen wollen, weil er in seiner Sch[…] überhaupt nur die Potenz eines Infinitinomiums und die […]griffe von Logarithmen voraussetzt und als gegeben ans[…] Daß er die Entstehung der Potenzformel mit beygebracht […]

lichen Auflösungen der beiden Gleichungen

$$p + q + r + s + \text{etc} = m \ldots$$
$$p + 2q + 3r + 4s + \text{etc} = m \ldots$$

in ganzen und bejahten Zahlen bestim[…] müssen.

5. Beyspiel. Es sind gegeben, die natü[…] len 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; man verlangt die [...] rer Produkte ex quaternis (ohne Wiederhol[…]

Auflösung. Die beiden unbestimmte[…] gen sind hier

$$p + q + r + s + \text{etc} = 6 \ldots$$
$$p + 2q + 3r + 4s + \text{etc} = 1 \ldots$$

Fünf Auflösungen in ganzen und bejah[…] sind hier möglich; und diese sind:

ist bloß der Leser wegen geschehen, die mit den [...] schen Zeichen und Begriffen noch nicht recht bekan[…] gentlich setzt er die Kenntniß der combinatorische[…] mel und ihres Gebrauchs voraus. H.

$= 63273$. Die Zahl der Produkte selbst ist wie b

$= \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5} = 126$.

6. Anm. Mit einer leichten Modification er
sich das Problem auch auf die Glieder der harm
schen Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots \frac{1}{m}$, exclusive.

IV. Aufgabe.

1. Die unendliche Reihe, die e^{e^x} ausdrückt, ha
gende allgemeine Form: $e\left(1 + \frac{Ax}{1} + \frac{Bx^2}{1.2} + \frac{C\ldots}{1.\ldots}\right.$
$\left. + \frac{Dx^4}{1.2.3.4} + \text{etc}\right)$; man verlangt das allgemein
setz der Coefficienten.

Auflösung. Eine Differentiation zu beiden
ten führt auf folgende Reihe von Gleichungen:

$A = 1$; $B = A + 1$; $C = B + 2A + 1$;
$D = C + 3B + 3A + 1$; $E = D + 4C + 6B + 4A +$
und überhaupt, das nte Glied $\mathcal{N}$ aus allen v

renz äußerst beschwerlich ist.

3. Eine von den vorhergehenden Coefficient unabhängige Bestimmung jedes willkührlichen C ten, außer der Ordnung, findet man durch die C nationslehre. Ihr zu folge, ist der Coeffic Gliedes x^n, oder

$$\mathcal{N} = \int \frac{n'}{p'\, q'\, r'\, s' \ldots \times 1^p\, 2^q\, 6^r\, 24^s\, 12c}$$

Diese Formel enthält folgende Vorschriften:

a) Man suche alle Auflösungen der unbe Gleichung $p + 2q + 3r + 4s + \text{etc} = n$, die zen und bejahten Zahlen möglich sind;

b) Für jede der gefundenen Auflösungen man den Bruch $\frac{n'}{p'\, q' \ldots \times 1^p\, 2^q \ldots}$;

c) Man addire alle diese Brüche zusammen, hier durch das vorgesetzte $\int$ angedeutet wird. Ihr me wird das gesuchte allgemeine Glied $\mathcal{N}$ seyn.

$1.2.3.4...n a y^{a}$ $\beta\ \gamma\ \delta$ etc

Wobey

1) Die Exponenten $\beta, \gamma, \delta \ldots$ der unbe
Gleichung $\beta + 2\gamma + 3\delta + 4\varepsilon +$ etc $= n-1$
zen und bejahten Zahlen Genüge thun müssen

2) $a = n + \beta + \gamma + \delta +$ etc gesetzt
$\beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$, etc in ähnlicher Bedeutung, wie p',
etc (S. 102, 2) genommen werden,

3) das obere Zeichen $+$ für ein bejahtes β –
$+ \varepsilon +$ etc, das untere $-$ hingegen, für ein v
$\beta + \gamma + \delta + \varepsilon +$ etc gültig ist.

2. Anmerk. Diese Aufgabe (die hier blos
spiel aufgestellt ist, denn es giebt der Aufgaben a
Classe noch viel mehrere) ist sehr weit umfasse
begreift nicht weniger, als: die Auflösung aller n
gedenkbaren algebraischen und transcendentischen
gen, in unendliche Reihen, wo jedesmal das a
Gesetz der Coefficienten, mit Beyhülfe der Comb
lehre gegeben ist, und in combinatorischen Zeichen
stellen läßt.

VI. Erklärung.

1. Es sey Y eine Funktion von y, und dieses letztere y wieder eine Function einer andern veränderlichen Größe x, und folglich auch Y eine minder gegebene, wenigstens mehr verwickelte Funktion von x;

Ferner sey $\frac{dY}{dy} = \overset{1}{Y}$; $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{dY}{dx} = P$

$$\frac{d\overset{1}{Y}}{dy} = 2\overset{2}{Y};\ \frac{dp}{dx} = 2q;\ \frac{dP}{dx} = 2Q$$

$$\frac{d\overset{2}{Y}}{dy} = 3\overset{3}{Y};\ \frac{dq}{dx} = 3r;\ \frac{dQ}{dx} = 3R$$

. . . .

. . . .

$$\frac{d\overset{n-1}{Y}}{dy} = n\overset{n}{Y};\ \frac{d\psi}{dx} = n\omega;\ \frac{d\Psi}{dx} = n\Omega$$ q)

Aufgabe.

2. Die beiden ersten Reihen $\overset{1}{Y}, \overset{2}{Y}, \overset{3}{Y}, \overset{4}{Y} \ldots \overset{n}{Y}$ und p, q, r, s ... ω werden als gegeben voraus gesetzt; man sucht die Glieder der dritten, P, Q, R, S ... Ω.

Auflösung. Die Differentiation, in Verbindung der auf p, q, r, s ... sich beziehenden Combinationsclassen ${}^mA$, ${}^mB$, ${}^mC$, ${}^mD$, ... mit den zugehörigen Polynomialcoefficienten a, b, c, d, ... giebt

q) Die Glieder $\overset{1}{Y}, \overset{2}{Y}, \overset{3}{Y} \ldots \overset{n}{Y}$, in einer nach oben stehendem Gesetze bestimmten Folge, sind hier mit Beyhülfe der Distanzexponenten ausgedrückt. So hätten auch die Glieder der beiden andern Reihen, sämtlich durch p und P ausgedrückt werden können. Es ist aber, wegen der in den vorigen Aufgaben schon gebrauchten Buchstaben p, q, r, s .. besser, sie hier beyzubehalten; und so sind ω und Ω hier nte Glieder. H.

3. Das combinatorisch ausgedruckte [...]gangsgesetz fällt in die Augen, wie auch, daß [...] auf diesem Wege jedes Glied, unabhängig von de[...]hergehenden, außer der Ordnung, nachsuchen, u[...] Beyhülfe des hier (am Ende in 2) beygefügten Zei[...] darstellen kann.

4. Eine Tafel der $a^m A$, $b^m B$, $c^m C$, u. s. w. [...] Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ hat Herr Prof. Hinden[...] (Infin. Dign. p. 167. Tab. V. auch Nov. Syst. [...] etc p. LIX. Tab. III.) gegeben. Man kann also, [...] kürzer, die Werthe der dortigen Combinationsclasse[...] ihren Zahlencoefficienten, nur abschreiben, wobey [...] aber

für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$
hier $p, q, r, s, t, u \ldots$

setzen muß.

5. So findet man die gesuchten Glieder der obige[...] ten Reihe, durch $p, q, r, s \ldots$ ausgedrückt, wie folg[...]

$$P = p\overset{1}{Y}$$

$$Q = q\overset{1}{Y} + p^2\overset{2}{Y}$$

&c &c &c &c

Ω = (Man sehe den folgenden Abschnitt.)

6. Es ist demnach allgemein $\Omega = \int K.(p^\alpha q^\beta r^\gamma s$
wobey die unbestimmte Gleichung zum Grunde lieg
$2\beta + 3\gamma + 4\delta +$ etc $= n$, und $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ e
Der Factor K ist die Versetzungszahl oder der
nomialcoefficient von $p^\alpha\ q^\beta\ r^\gamma\ s^\delta\ t^\varepsilon$ . . . o
Rücksicht auf $\overset{m}{Y}$.

7. Die hier gelehrte Auflösung führt überha
zu: „Wenn y durch eine unendliche Reihe von x
„ist, und Y jede algebraische oder transcendentisch
„tion von y vorstellt, auch diese Funktion Y durch
„endliche Reihe $A x^r + B x^{r+d} C x^{r+2d} + D x^{r+3d}$
„auszudrücken." Die Potenzen und Logarithmen
finitinomiums sind äußerst leichte und beschränkte
rien davon. Für jeden besondern Fall der allg
Aufgabe erhält man zugleich die vollständige A
einer Equation aux differences finies, vermittelst d
binationslehre.

Schlußerinnerung des Herausgebers.

1. So viel vor itzt von Herrn D. Kramp's combinatorisch-analytischen Auflösungen verschiedener, zum Theil sehr wichtiger und vielumfassender Aufgaben. Man kann daraus schon sehen, was man sich in dem Fache von diesem vortreflichen Analysten zu versprechen hat. Einige andere Aufgaben von ihm, die hier nicht Platz finden konnten, ein andermal — im mathematischen Archive.

2. Unter den übersendeten combinatorisch-analytisch-behandelten Aufgaben, war die vom Coefficienten des allgemeinen Gliedes der Potenz eines Infinitinomiums (S. 102, 4) die erste; auch ist sie, nebst dem allgemeinen Produktenprobleme, die Basis der combinatorischen Analysis, und beide zeigen das Unterscheidende des Combinationsverfahrens vor andern am deutlichsten. Ich habe daher diese beiden Probleme, die in der Folge sehr häufig angewendet werden, vor allen andern zuerst in Ordnung gebracht und ausgeführt (Infin. Dign §. XXI, XXVII u. f. Nov. Syst. Perm. p. LIV, LXIX u. f.).

3. Herr D. Kramp hat bey seiner Lage, von allen gelehrten Hülfsmitteln entblößt, erst später erfahren, daß der von ihm gefundene Hülfssatz (S. 102, 2) schon Jacob Bernoulli'n Opp. T. II. p. 995, 996.) bekannt gewesen. Dieser hat ihn auch bereits (S. 998.) auf eine Reihe wie $\alpha x + \beta x^3 + \gamma x^6 + \delta x^{10} +$ etc (wo die Exponenten nicht nach einem gemeinschaftlichen Unterschiede d fortgehen) erstreckt; freylich noch mit der Unvollständigkeit, daß er es auf den Erfolg ankommen ließ (Bernoulli's Exempel, nach seiner ersten Methode ausgeführt, habe ich auch Infin. Dign. p. 42, 43 beygebracht) wie einerley hier und da zerstreute Potenzen sich einfinden und gliederweise zusammen nehmen ließen. Dieser so großen Unvollkommenheit, bey solchen Reihen, wo

die Exponenten nach willkührlichen Sprüngen wachsen oder abnehmen, hat Hr. D. Kramp durch sein methodisches Verfahren, wodurch er die Schwierigkeit auf die Auflösung eines unbestimmten combinatorisch-analytischen Problems zurück geführt hat, abgeholfen.

4. Es kann meinen Lesern, und selbst auch Herrn D. Kramp nicht anders als angenehm seyn, zu erfahren, daß schon de Moivre die Nothwendigkeit einer solchen Reduktion eingesehen hat. Ich will seine Aeußerung hierüber, mit seinen eigenen Worten anführen. Er spricht von Quotienten, den die Einheit durch eine Reihe dividirt giebt (von den Gliedern der Potenz — 1 dieser Reihe) und sagt ausdrücklich im 3ten Zusatze zu seinem Haupttheorem, der Erhebung eines Polynoms zu einer verlangten Dignität — Si in Quotiente oriundo ex Diuisione Vnitatis per Multinomium quodlibet, exempli gratia, Quadrinomium $1 - bz - cz^2 - dz^3$, requirantur producta omnia literalia sub eadem potestate z^l ordinanda, ea obtineri poterunt ope *Methodi, qua soluuntur quaestiones de Numeris integris;* etenim *inuentis tribus numeris* x, y, z, *quorum primus si multiplicetur per* 1, *secundus per* 2, *tertius per* 3; *producti numeri omnes, siue sigillatim sumti, siue bini, siue terni, semper conficiant summam* l, *et conuertantur valores integri quantitatum* x, y, z, *in respectiuos indices quantitatum* b, c, d, *et pro summis quantitatum* x, 2y, 3z, *quoquo modo sumtis, scribantur producta quantitatum respondentium cum indicibus suis propriis, producta haec omnia simul sumta, ea ipsa erunt quae requirebantur*: et eodem modo procedere licet ad quinquinomium, si adhibeatur *noua litera* v, per *numerum* 4 *multiplicanda*, et sic *deinceps* in *infinitum*. Misc. Anal. p. 90. Coroll. III.

5. Das Verfahren (*Methodus*) von welchem de Moivre hier spricht, soll nemlich die Zahlen z, y, x, ..

S. 529 u. f.) von ihr gehandelt. Man vergleiche S
das. S. 371 u. f.

6. Herrn D. Kramps Verfahren, den gesu
Coefficienten zu bestimmen, ist also vorzüglich da
brauchen, wo die Exponenten der veränderlichen Grö
der Reihe sprungweise (nach Willkühr) fortgehen. A
nen solchen Fall, habe ich bereits erinnert (Arch. H
S. 410, 32) sey die Boscovichsche Zusammensetzun
einzelnen Exponenten zu einer bestimmten Summe vo
lich bequem, habe solches auch (S. 415, 38) durc
Beyspiel erläutert. Ist aber diese Summe, wie im E
pel bey Herrn D. Kramp (S. 103, 6) eine große Zah
würde man ihre Zusammensetzung nicht so bequem nac
Boscovichschen als Krampischen Art finden. Sonst
und überhaupt für den Fall, daß die Exponenten i
gegebenen Reihe nach einer arithmetischen Progression
einander folgen, welches freylich am häufigsten vorkom
bleibt es bey der unmittelbaren Anwendung der nun
längst bekannten Involutionen. Das Maxim
der Bequemlichkeit ist nemlich hier mit dem Minim
der Arbeit aufs innigste verbunden.

7. Das Zeichen $\int$ der Krampischen Summirung (S. 103 u. a.) auch das allgemeine Polynomialcoefficientenzeichen K (S. 102) mit einem Punkt vor dem Litteralprodukte, dessen Polynomialcoefficient gefordert wird; beide stimmen gut mit meinen übrigen Zeichen.

Auch ich habe zuweilen, die Summe mehrerer zusammengehöriger Theile (einzelner Complexionen) anzudeuten, mich des Zeichens $\int$ bedient (*Infinit. Dign. p.* 21. *not.*); und eben so hat neuerlich Herr Professor Klügel die Summe aller ähnlichen Verbindungen, z. B. aller b, c, d . . . durch $\int$. b; aller bc, bd, cd, . . . durch $\int$. bc, u. s. w. (hier S. 66, 67.) bezeichnet. Daß man das Krampische K mit meinem κ verwechseln werde, ist nicht zu befürchten. Mein Coefficientenzeichen κ mit einer beygefügten Zahl n oder (n+1), ist ganz etwas anders — ein Lokalzeichen, welches jenes K gewöhnlich in sich begreift. K ist der allgemeine Ausdruck für meine a, b, c, d...., die sich auf bestimmte Mengen der Factoren des Literalproduktes beziehen; mein $\mathfrak{n}$ für n Factoren. Man könnte übrigens, noch näher oder vielmehr ganz bey der Analogie zu bleiben, $\mathfrak{k}$ in eben dem Umfange wie K, für den allgemeinen Polynomialcoefficienten und eben so auch $^{m}\mathfrak{K}$ für den allgemeinen Binomialcoefficienten vom Exponenten m nehmen. In dem Falle würde man z. B. in den combinatorisch-analytischen Formeln (Arch. d. Math. Heft 4. S. 397, 414) das dortige $^{m}\overset{*-1}{\mathfrak{A}}a$ mit $^{m}\mathfrak{K}\,\mathfrak{k}$ verwechseln. Doch ist das erstere vorzüglicher, weil das $^{m}\mathfrak{K}\,\mathfrak{k}$ hier noch eine kleine wörtliche Nachweisung nöthig machen würde, die bey der andern Bezeichnung wegfällt; denn die successive Bestimmung des Sternchens in a^{m-*}, führt die augenblickliche Interpretation von dem nebenstehenden $\overset{*-1}{\mathfrak{A}}a$ gleich bey sich.

Um die Formeln, welche die Auflösung enthalten, noch darstellender zu machen, darf man nur bey Ausdrücken, dergleichen oben mehrere vorgekommen sind, (wie der S. 117, 6), in die Stelle, wo ich die zu bearbeitenden Elemente oder auch den Zeiger beyzufügen pflege, die Bedingungsgleichungen setzen, z. B.

$$\Omega = \int K.\,(p^{\alpha}\, q^{\beta}\, r^{\gamma}\, s^{\delta}\, t^{\varepsilon} \ldots) \overset{m}{Y}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c = m \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \&c = n \end{pmatrix}$$

h.

Hier wäre eigentlich der Ort, wo ich die au
angegebene neue Bearbeitung des Poly
rems von mir aufstellen könnte; da aber der
ganzen Schrift eben so sehr der Anwendun
binatorisch=behandelten, allgemeinen Potenzen
duktenprobleme auf die Reihen, als ihrer Beg
gewidmet ist, bey welcher letztern es doch n
darauf ankommt, zu zeigen, wie innigst gena
Combinationen zusammen hängen, und daß
diese, auf dem leichtesten Wege (dem Wege d
zu jenen gelangt — so glaube ich wird es
die fremden Abhandlungen beysammen zu lass
der meinigen den Beschluß zu machen.

Wie genau Herr Prof. Pfaff sich mit
torisch=analytischen Methode bekannt gemach
wie tief er in den Geist derselben eingedrung
den Lesern des ersten Bandes des mathematis
nicht unbekannt seyn. Er sucht, eben so
Kramp, den höhern Calcul mit der Comb

in Verbindung zu setzen, und hat sich dazu vornehmlich meiner Lokalausdrücke für Coefficienten von Potenzen, Produkten und Quotienten der Reihen mit großem Vortheile bedient — immer unter der sehr wahren Voraussetzung, daß die Werthe solcher Zeichen durch combinatorische Behandlung auf dem leichtesten Wege gegeben seyen. Dahin gehört auch diese und die folgende Abhandlung, worinn sogleich in der ersten Anmerkung ein ausführliches Urtheil, *cum rationibus*, über diese meine Lokalausdrücke und Formeln beygebracht ist. Um dieses für mehrere Leser — die in demselben Falle mit H. Pf. gewesen oder noch sind — ganz belehrend zu machen, will ich eine Stelle aus dem Briefe dieses vortreflichen Analysten, worinn er mir die Abhandlungen zusendete (vom 10 März 1795) hier beyfügen:

— „Ich denke, diese Aufsätze werden wenigstens den „Nutzen nicht verfehlen, die Ueberzeugung von der Wich„tigkeit Ihrer Lokalformeln mehr zu verbreiten. Wer sie „liest, wird doch dadurch eine Fertigkeit in Verständniß „und Gebrauch solcher Formeln erlangen müssen. Ich „habe an Andern erfahren, daß diese Fertigkeit nicht immer „leicht erworben wird; und von mir selbst muß ich aufrich„tig bekennen, daß ich anfangs weniger von der Sache hielt, „als itzt, und solche Zeichen, wie p $\varkappa$ n, p^{m} $\varkappa$(n+1), sogar „für unzweckmäßig und überflüssig ansah. Der in folgendem „Abschnitte (in den Bemerkungen über eine besondere „Art von Gleichungen, nebst Beyspielen von ihrer Auf„lösung) angegebene Gesichtspunkt scheint mir wirklich „fruchtbar zu seyn — der Aufsatz ist freylich nur flüchti„ger Entwurf der Gedanken, die sich erst, während des „Gebrauchs der Lokalzeichen, bey mir entwickelt haben. „Indessen habe ich doch geglaubt, es sey besser, ihn auch „in dieser Gestalt bekannt zu machen, als noch länger daran „zu feilen. — Je weiter man in der Analysis fortschrei-

Sätzen Gebrauch machen will.

Hindenb…

---

1. Satz. Wenn die Coefficienten zweyer …
p und q das Verhalten gegen einander haben, das …
des n, $p \varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} q^{+nd} \varkappa (n+1)$ *) …

*) In Worten ausgedrückt, würde die Bedingung des …
lauten: q und p seyen zwey Reihen: Z. B.

$$q = \alpha + \overset{1}{\alpha} x + \overset{2}{\alpha} x^2 + \ldots + \overset{n}{\alpha} x^n + \ldots$$

$$p = a + \overset{1}{a} x + \overset{2}{a} x^2 \ldots + \overset{n}{a} x^n + \ldots$$

Man erhebe die erste auf die (f+nd)te Potenz (wo n e…
Zahl bedeutet), und es sei $q^{f+nd} = \mathfrak{A} + \overset{1}{\mathfrak{A}} x + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^2 \ldots$
so werden die Coefficienten der andern Reihe p so ange…
daß für jedes n dann $\overset{n}{a} = \frac{f}{f+nd} \cdot \overset{n}{\mathfrak{A}}$. Es ist nehmli…

ten Formel, $y^{mf} \varkappa (n+1) = \frac{mf}{mf+nd} q^{mf+nd} \varkappa(n$

Folglich muß, da $y^{mf} = p^m$, auch $p^m \varkappa (n-$

$\frac{mf}{mf+nd} q^{mf+nd} \varkappa(n+1)$ seyn. Diese Gleichung

(n+1)te Coefficient der Reihe p, d. i. $p\varkappa(n+1)$, u
eben sovielte von q^{f+nd}, d. i. $q^{f+nd}\varkappa(n+1)$.
leicht, wie sehr durch diese Hindenburgische Bezeic
Ausdrücke abgekürzt werden. Aber auch die
bey den Beweisen werden einfacher durch den Gebr
Coefficienten-Zeichens, das daher bey manchen sehr
ten Untersuchungen über Reihen nicht ohne Nachthei
werden kann, so unzweckmäßig der unbedingt allge
brauch desselben in andern Fällen seyn würde. Sol
gewähren, außer der Abkürzung des Vortrags und d
terung des Nachdenkens, auch den wesentlichen Vort
Untersuchungen veranlassen, an die man sonst nic
gedacht hätte. Die Mathematik hat bisher das Glü
daß bey ihr immer nützliche und verständlich
geltend geworden sind. Es ist zu hoffen, daß auch k
der übel gewählte noch überflüssige Zeichen eingefü
mögen, woraus nur Verwirrung entstehen würde. —
wähnten Hindenburgischen Coefficienten-Zeichens ha
besondere H. M. Rothe mit vielem Vortheile bedie
ner lehrreichen und gründlichen Abhandlung (*de serie*
deren Vergleichung mit gegenwärtigen Aufsätzen,
durch Kürze einigermaßen dunkel seyn möchte, hin
läutern wird. P.

tischen Sinne sehr einfach sind. So ist z. B. fü

$f = d = 1,$

$(q \varkappa 1 . x + \frac{1}{2} q^2 \varkappa 2 . x^2 + \frac{1}{3} q^3 \varkappa 3 . x^3 + \frac{1}{4} q^4 \varkappa 4 .$

$= q^m \varkappa 1 . x^m + \frac{m}{m+1} . q^{m+1} \varkappa 2 . x^{m+1} + \frac{m}{m+2} q^{m+2}$

wo für m auch gebrochene und verneinte Zahlen werden können.

3. Zusatz.

Wenn $p^\mu \varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} q^{f+nd} \varkappa (n+$

so ist $p^m \varkappa (n+1) = \frac{mf}{mf+n\mu d} q^{\frac{nf+n\mu d}{\mu}} \varkappa ($

Setzt man nemlich $p^\mu = \pi$, so ist

$\pi \varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} q^{f+nd} \varkappa (n+1)$, als

$\pi^{\frac{m}{\mu}} \varkappa (n+1) = p^m \varkappa (n+1) = \frac{\frac{m}{\mu} f}{\frac{m}{\mu} f + nd} . q^{\frac{m}{\mu}}$

h

so wird $\pi \varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} Q^{f+nd} \varkappa (n+1$

folglich (nach 1) $\pi^{\frac{m}{\mu}} \varkappa (n+1) = \frac{\frac{m}{\mu} f}{\frac{m}{\mu} f + nd} . Q^{\frac{m f + nd}{\mu}} \varkappa (n$

*) und $p^m \varkappa (n+1) = \left(\frac{f}{h}\right)^{\frac{m}{\mu}} \frac{\frac{m}{\mu} f}{\frac{m}{\mu} f + nd} . q^{\frac{\frac{m}{\mu} f + nd}{e}} \varkappa (n-$

5. Satz. Wenn für eine beliebige zahl von Reihen p, p′, p″, p‴ ... folg Gleichungen statt finden:

$$p \varkappa (n+1) = \frac{f}{f+nd} q^{f+nd} \varkappa (n+1),$$

$$p' \varkappa (n+1) = \frac{f'}{f'+nd} q^{f'+nd} \varkappa (n+1),$$

*) Daß, wenn a eine beständige Größe bedeutet, (aP) = a.P$\varkappa$(n+1), ist für sich klar.

Man kann daher $p^{f'} = (p')^{f}$ setzen, oder p
Aus eben dem Grunde darf man auch folgende Gl
annehmen: $p'' = p^{\frac{f''}{f}}$, $p''' = p^{\frac{f'''}{f}}$ u. s. w. D
also das Produkt $p\,p'\,p'' \ldots = p . p^{\frac{f'}{f}} . p^{\frac{f''}{f}} \ldots = p$
Folglich, (in 6) für m gesetzt $\frac{f+f'+f'' \ldots}{f}$; $(p\,p'\,p'' \ldots$

$$= \frac{f+f'+f'' \ldots}{f+f'+f'' \ldots + nd} . q^{f+f'+f'' \ldots + nd} \varkappa (n+1).$$

6. **Satz.** Unter den Voraussе
des vorigen Satzes ist $p^{m} . (p')^{m'} . (p'')^{m''}.$

$$= \frac{mf+m'f'+m''f'' \ldots}{mf+m'f'+m''f'' \ldots + nd} . q^{mf+m'f'+m''f'' \ldots +}$$

Beweis. Nach den Gründen des vorig
weises kann das Produkt $p^{m} . (p')^{m'} . (p'')^{m}$

$$= p^{\frac{mf+m'f'+m''f'' \ldots}{f}}$$ gesetzt werden, und so

J

Gleichung des gegenwärtigen Satzes aus (1), wenn man für das dortige m hier $\frac{mf + m'f' + m''f'' \ldots}{f}$ setzt.

7. Zusatz. Die Produkte aus solchen Reihen, als hier betrachtet werden, und ihren Potenzen, lassen sich demnach analytisch einfach darstellen. Es ist nemlich:

$$\left(\frac{f}{f} q^{f} \varkappa 1 . x^{\alpha} + \frac{f}{f+d} q^{f+d} \varkappa 2 . x^{\alpha+\beta} + \frac{f}{f+2d} q^{f+2d} \varkappa 3 . x^{\alpha+2\beta} + \ldots\right)^{m}$$

$$\times\left(\frac{f'}{f'} q^{f'} \varkappa 1 . x^{\alpha'} + \frac{f'}{f'+d} q^{f'+d} \varkappa 2 . x^{\alpha'+\beta} + \frac{f'}{f'+2d} q^{f'+2d} \varkappa 3 . x^{\alpha'+2\beta} + \ldots\right)^{m'}$$

$$\times\left(\frac{f''}{f''} q^{f''} \varkappa 1 . x^{\alpha''} + \frac{f''}{f''+d} q^{f''+d} \varkappa 2 . x^{\alpha''+\beta} + \frac{f''}{f''+2d} q^{f''+2d} \varkappa 3 . x^{\alpha''+2\beta} \ldots\right)^{m''}$$

$$\times \mathrm{etc} = \frac{F}{F} q^{F} \varkappa 1 . x^{A} + \frac{F}{F+d} . q^{F+d} \varkappa 2 . x^{A+\beta} + \frac{F}{F+2d} . q^{f+2d} \varkappa 3 . x^{A+2\beta} + \mathrm{etc.}$$

wo $F = mf + m'f' + m''f'' + m'''f''' \ldots$

und $A = m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha'' + m'''\alpha''' \ldots$

8. Zusatz. Die Sätze 5. und 6. lassen sich auf eine ähnliche Art allgemeiner machen, wie der in 1. durch die Zusätze 3. u. 4.

Wenn nemlich $p^{\mu} \varkappa (n+1) = \frac{h}{f+nd} . q^{\frac{f+nd}{e}} \varkappa (n+1)$,

$$(p')^{\mu'} \varkappa (n+1) = \frac{h'}{f'+nd} . q^{\frac{f'+nd}{e}} \varkappa (n+1),$$

$$(p'')^{\mu''} \varkappa (n+1) = \frac{h''}{f''+nd} . q^{\frac{f''+nd}{e}} \varkappa (n+1),$$

$$p' \varkappa (n+1) = q^{f'} \varkappa (n+1)$$
$$p'' \varkappa (n+1) = q^{f''} \varkappa (n+1)$$
$$\&c \qquad \&c$$

so ist $(P.\, p^m . (p')^{m'} . (p'')^{m''} \ldots .) \varkappa (n +$

$$= \frac{s(g + mf + m'f' + m''f'' \ldots) + nc}{g + mf + m'f' + m''f'' \ldots .}$$
$$+ q^{g + mf + m'f' + m''f'' \ldots} \varkappa (n +$$

Beweis. Da die Exponenten willkühr
nehme man für q^g folgende Reihe an:

$$q^g = q^g \varkappa 1 . x^s + q^g \varkappa 2 . x^{s+c} + q^g \varkappa 3 . x^s$$

so ist $\frac{g . q^{g-1} dq}{dx} = s q^g \varkappa 1 . x^{s-1} + (s + c) q^g$

$$+ (s + 2c) q^g \varkappa 3 . x^{s-1+2c} + \&c$$

also $\frac{g . q^{g-1} dq}{dx} \varkappa (n+1) = (s+nc) q^g \varkappa (n+1) =$

Man darf also $P = \frac{g . q^{g-1} dq}{dx}$ setzen.

$q^G \varkappa 1. x^{\frac{sG}{g}} + q^G \varkappa 2. x^{\frac{sG}{g}+c} + q^G \varkappa 3. x^{\frac{sG}{g}+2c} + \&c$

$$\text{folglich} \quad \frac{d(q^G)}{dx} = \frac{sG}{g} . q^g \varkappa 1. x^{\frac{sG}{g}-1} + \frac{sG+cg}{g} . q^G \varkappa 2. x^{\frac{sG}{g}+c-1} + \&c$$

$$\text{und } \frac{d(q^G)}{dx} \varkappa (n+1) = \frac{sG+ncg}{g} q^G \varkappa (n+1).$$

Demnach wird $(P.p^m. (p')^{m'}. (p'')^{m''} \ldots) \varkappa (n+$

$$= \frac{g}{G} . \frac{dq^s}{dx} \varkappa (n+1) = \frac{sG+ncg}{G} . q^G \varkappa (n+1)$$

10. Zusatz. Es ist demnach

$$(s q^g \varkappa 1. x^\alpha + (s+c) q^g \varkappa 2. x^{\alpha+\beta} + (s+2c) q^g \varkappa 3. x^{\alpha+2\beta} + \ldots .)$$
$$\times (q^f \varkappa 1. x^\alpha + q^f \varkappa 2. x^{\alpha+\beta} + q^f \varkappa 3. x^{\alpha+2\beta} + \ldots)$$
$$\times (q^{f'} \varkappa 1. x^{\alpha'} + q^{f'} \varkappa 2. x^{\alpha'+\beta} + q^{f'} \varkappa 3. x^{\alpha'+2\beta} + \ldots$$
$$\times (q^{f''} \varkappa 1. x^{\alpha''} + q^{f''} \varkappa 2. x^{\alpha''+\beta} + q^{f''} \varkappa 3. x^{\alpha''+2\beta} + \ldots)$$
$$\times \&c = \tfrac{1}{G} (s G q^G \varkappa 1. x^{\mathfrak{A}} + (sG+cg) q^G \varkappa 2. x^{\mathfrak{A}+\beta} + (sG+2cg) q^G \varkappa 3. x^{\mathfrak{A}+2\beta} + \&c)$$

§. 50.) enthalten ist. Die Art, wie ich hi
darzustellen versucht habe, scheint mir die
Schlüsse zu vereinfachen. Das leitende Pr
sen Untersuchungen ist folgender (bey den b
weisen zum Grunde liegende) allgemeine Sa
gehörige Anwendung speciellere Sätze überfl
Formeln für Coefficienten, welch
nahme gewisser Exponenten erw
gelten allgemein, für alle andere
ten. Der Grund ist, weil die Coefficiente
dukten *) und Potenzen der Reihen n
Exponenten (noch) auch von der veränderliche
hängen. Daraus folgt nothwendig, daß
der erwähnten Art, wenn sie für eine (
Reihe von Exponenten nicht statt fänden, au
andere statt finden könnten. Man darf als
sondere (unabhängige, ursprüngliche) R

*) Bey Produkten aus Reihen werden die Fa
nach Potenzen einer veränderlichen Größe mi
nenten-Unterschied fortgehend angenommen. L
Produkte in negative Potenzen. P.

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

so ist $p^\lambda\, q^\mu\, r^\nu \ldots = x^{\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma \ldots} (A + A'z + A''z^2 \ldots$
$. (B + B'z + B''z^2 \ldots)^\mu . (C + C'z + C''z^2 \ldots)^\nu \ldots$
wo also $x^d = z$ gesetzt wird. Also ist jeder Coeffic
von $p^\lambda\, q^\mu\, r^\nu \ldots$ wenn für p, q, r . . . die allge
nern Reihen genommen werden, einerley mit dem ebe
vielten für $\alpha = 0$, $d = 1$, d. i. für die einfachste R
der Exponenten. Durch diese Betrachtung werden so
Untersuchungen einfacher und leichter, weil man nun
den Reihen von den veränderlichen Größen und den Ex
nenten abstrahiren kann, und bloß auf die Coefficien
Reihe Rücksicht zu nehmen hat.

12. Anmerkung. Zu mehrerer Erläuterung
cher Schlüsse, und zu Empfehlung der Vorsicht, m
folgender Trugschluß dienen: Es sey

$$p\varkappa(n+1) = \frac{f}{f+nd}\, q^{f+nd}\, \varkappa(n+1)$$

*) Eben darum ist es hinreichend, bey dem Beweise des In
tinomial-Satzes die Reihe in ihrer einfachsten Form zu betr
ten. (*Kaestner l. c.* §. 56. XV. *Hindenburg Probl. uni*
ad ser. revers. p. 18. *not.* i).

P.

$= \frac{\ldots}{f+f'+nd} . q^{f+f'+nd} \varkappa(n+1)$

Diese Gleichung ist unrichtig, wie schon daraus daß aus eben diesem Grunde folgen würde: pp'

$= \frac{f+f'}{f+f'+nd} . (q')^{f+f'+nd} \varkappa(n+1)$, da doch

verschieden sind.

Es ist alles richtig, bis auf den Schluß pp' Nemlich in der Gleichung $p = y^f$, wird y^f als Potenzen von q fortgehende Reihe vorausgesetzt: $= p'$, ist nach Potenzen von q' ausgedrückt. man hier nicht schließen $pp' = y^{f+f'}$. Die Facto haben nicht einerley veränderliche Größe.

13. Satz.

Wenn $P\varkappa(n+1) = \frac{(s+nc)g}{g+nd} . q^{g+nd} \varkappa(n$

$p\varkappa(n+1) = \frac{f}{f+nd} . q^{f+nd} \varkappa(n+$

so ist $y^g \varkappa (n+1) = \frac{g}{g+nd} \cdot q^{g+nd} \varkappa (n+$

also $P \varkappa (n+1) = (s+nc) y^g \varkappa (n+1)$;

ferner $p \varkappa (n+1) = y^f \varkappa (n+1)$

$p' \varkappa (n+1) = y^{f'} \varkappa (n+1)$

$p'' \varkappa (n+1) = y^{f''} \varkappa (n+1)$

&c &c &c

Folglich wird, nach 9. $(P p p' p'' \ldots) \varkappa (n+1)$

$$= \frac{sG+ncg}{G} \cdot y^G \varkappa (n+1)$$

$$= \frac{sG+ncg}{G} \cdot \frac{G}{G+nd} \cdot q^{G+nd} \varkappa (n+$$

$$= \frac{sG+ncg}{G+nd} \cdot q^{G+nd} \varkappa (n+1),$$

wo $G = g + f + f' + f'' \ldots$

14. Satz. Unter den Voraussetz

des vorigen Satzes ist:

$$(P p^{m} (p')^{m'} (p'')^{m''} \ldots) \varkappa (n+1) = \frac{sG+ncg}{G+nd} . q^{G+nd} \varkappa (n+1),$$

$G = g + mf + m'f' + m''f'' + \ldots$, gesetzt.

Beweis. Dieser Satz wird auf eben die Art, wie der vorhergehende, mit Zuziehung von 9. hergeleitet.

15. **Zusatz.** Es ist also

$$(s q^{g} \varkappa 1. x^{a} + (s+c) \frac{g}{g+d} . q^{g+d} \varkappa 2. x^{a+\beta}$$

$$+ (s+2c) \frac{g}{g+2d} . q^{g+2d} \varkappa 3. x^{a+2\beta} + \ldots)$$

$$\times (q^{f} \varkappa 1. x^{\alpha} + \frac{f}{f+d} . q^{f+d} \varkappa 2. x^{\alpha+\beta}$$

$$+ \frac{f}{f+2d} . q^{f+2d} \varkappa 3. x^{\alpha+2\beta} + \&c)^{m}$$

$$\times (q^{f'} \varkappa 1. x^{\alpha'} + \frac{f'}{f'+d} . q^{f'+d} \varkappa 2. x^{\alpha'+\beta}$$

$$+ \frac{f'}{f'+2d} . q^{f'+2d} \varkappa 3. x^{\alpha+2\beta} \ldots)^{m'}$$

$$\times \&c = s q^{G} \varkappa 1. x^{\mathfrak{A}} + \frac{sG+cg}{G+d} . q^{G+d} \varkappa 2. x^{\mathfrak{A}+\beta}$$

$$+ \frac{sG+2cg}{G+2d} . q^{G+2d} \varkappa 3. x^{\mathfrak{A}+2\beta} + \&c,$$

$\mathfrak{A}$ und G wie in (14.) genommen.

16. **Zusatz.** Ist $s = 1$, $cg = d$, so ist der Coefficient in (14.) $= q^{g+mf+m'f' \ldots + nd} \varkappa (n+1)$, und das Produkt in (15.) $= q^{G} \varkappa 1. x^{\mathfrak{A}}$
$+ q^{G+d} \varkappa 2. x^{\mathfrak{A}} . \beta + q^{G+2d} \varkappa 3. x^{\mathfrak{A}+2\beta} + \&c.$

so ist $(P^{\lambda} p^{m} . (p')^{m'} . (p'')^{m''} \ldots) \varkappa (n+1)$

$$= \frac{\gamma}{g} . \left(\frac{h}{f}\right)^{\frac{m}{\mu}} . \left(\frac{h'}{f'}\right)^{\frac{m'}{\mu'}} . \left(\frac{h''}{f''}\right)^{\frac{m''}{\mu''}} \ldots$$

$$\left[\frac{s(g + \frac{m}{\mu} f + \frac{m'}{\mu'} f' + \frac{m''}{\mu''} f'' \ldots) + ncg}{g + \frac{m}{\mu} f + \frac{m'}{\mu'} f' + \ldots + nd}\right] qg + \frac{m}{\mu} f + nd \varkappa ($$

Man darf nur $P^{\lambda} g = \Pi$, $\frac{f p^{\mu}}{h} = \pi$, $\frac{f'}{h'} \cdot (p')^{\mu'} = \pi$

und $q^{\frac{1}{c}} = Q$, auch in (14.) für das dortig

hier $\frac{m}{\mu}$ setzen.

18. Ableitung der La Grangischen Re-
sionsformel aus dem ersten Satze.

1. Aus (2) folgt nachstehende Gleichung:

$p \varkappa 1 . (q \varkappa 1 . u + \frac{1}{2} q^2 \varkappa 2 . u^2 + \frac{1}{3} q^3 \varkappa 3 . u^3 + \frac{1}{4} q^4 \varkappa 4 . u^4$

$+ \frac{1}{2} p \varkappa 2 . (q \varkappa 1 . u + \frac{1}{2} q^2 \varkappa 2 . u^2 + \frac{1}{3} q^3 \varkappa 3 . u^3 . .$

um mich der von H. M. Rothe (l. c. §. 1) gebr
Redensart zu bedienen, oder (wie man auch sagen
man gebe den Reihen p und q die beygeschriebenen Coe
ten, so verwandelt sich, mit Zuziehung der von de
(Archiv II. H. S. 229) erwiesenen Formeln, di
chung in (1), wenn noch beiderseits ψy addirt,
für x, und $\psi' y$ für $\frac{d\psi y}{dy}$ gesetzt wird, in folgende

$$\psi y + z\varphi y . \psi' y + \frac{z^2 d(\varphi y^2 . \psi' y)}{1.\ 2.\ dy} + \frac{z^3 d^2(\varphi y^3 . \psi' y}{1.\ 2.\ 3.\ dy^2}$$

$$= \psi y + (z\varphi y + \frac{z^2 d(\varphi y^2)}{1.\ 2.\ dy} + \frac{z^3 d^2(\varphi y^3)}{1.\ 2.\ 3.\ dy^2} + \ldots$$

$$+ (z\varphi y + \frac{z^2 d(\varphi y^2)}{1.\ 2.\ dy} + \frac{z^3 d^2(\varphi y^3)}{1.\ 2.\ 3.\ dy^2} + \ldots)^2 \frac{d^2}{1.}$$

$+$ &c &c

3. Was rechter Hand des Gleichheitszeichen
läßt sich nach dem Taylorischen Satze kurz
drücken:

sen x, y und z.

5. Nun kann man also rückwärts schließen
diese Gleichung statt findet, so wird jede Funktion
unter den drey Größen, x, durch die Reihe in (3) aus
So läßt sich die La Grangische Formel bewei
gleich nicht finden. Der Beweis kommt da
daß man zeigt, von den beiden Reihen, welche
mel für x und für ψx giebt, sey letztere Reihe e
tion ψ der ersten (woraus dann, ψ mit φ verwe
Gleichung in 4 für x folgt), d. i. daß man die N
der Gleichung in (2) darthut. Neben einigen V
die ich anstellte, ehe ich den Beweis (in I. H. d
S. 81) erhielt, gerieth ich auf gegenwärtige B
leitete aber die Gleichung in (2) aus dem Ausd
$d^n(xy)$ her. So war dieser Beweis verwickelt
ner. Doch schien mir gegenwärtige Uebersetzung
in Lokalformeln, zugleich als ein Beyspiel von
vortheilhaften Gebrauche zu dienen, den man ö
solchen Formeln machen kann.

19. Substitution von Reihen in Re

*) Serierum in series substitutio (*Hindenburg Prin*
etc. p. XXVII.)

$$+ \frac{1}{a+2b} . p \varkappa . 3 . (q \varkappa 1 . x + \frac{1}{1+b} . q^{1+b} \varkappa 2 .$$

$$+ \frac{1}{1+2b} . {}^{1+2b} \varkappa 3 . x^{1+2b} \ldots)^{a+2b}$$

$$+ \quad \&c \quad \&c$$

$$= \frac{1}{a} (p q^{a}) \varkappa 1 . x^{a} + \frac{1}{a+b} (p q^{a+b}) \varkappa 2 . x^{a+}$$

$$+ \frac{1}{a+2b} (p q^{a+2b}) \varkappa 3 \; x^{a+2b} + \&c$$

2. Man kann diesen Satz so ausdrücken:

Wenn $z = A y^{a} + B y^{a+b} + C y^{a+2b} + \ldots$

und $y = q \varkappa 1 . x + \frac{1}{1+b} . q^{1+b} \varkappa 2 . x^{2}$

$$+ \frac{1}{1+2b} . q^{1+2b} \varkappa 3 . x^{3} + \&c$$

in die Reihe z substituirt werden soll, so kommt

$$\overset{x}{z}\,\varkappa(n+1) = \frac{1}{a+nb}\,(p\,q^{a+nb})\,\varkappa(n+1)$$

$$\overset{y}{z}\,\varkappa(n+1) = \frac{1}{a+nb}\,p\,\varkappa(n+1)$$

Diese Bezeichnung scheint auch in andern F
Verwirrung zu vermeiden, dienlich zu seyn.
gleiche (12).

4. Wenn man in (1) differentiirt, so komm

$$p\varkappa 1.(q\varkappa 1.x + \frac{1}{1+b}q^{1+b}\varkappa 2.\,x^{1+b}$$

$$+ \frac{1}{1+2b}q^{1+2b}\varkappa 3.\,x^{1+2b} + \ldots)^{a-1}$$

$$+ p\varkappa 2.(q\varkappa 1.x + \frac{1}{1+b}q^{1+b}\varkappa 2.\,x^{1+b} + \ldots$$

$$+ p\varkappa 3.(q\varkappa 1.x + \frac{1}{1+b}q^{1+b}\varkappa 2.\,x^{1+b} + \ldots$$

$$+ \quad \&c \quad \&c$$

$$= \frac{(p\,q^{a})\varkappa 1.\,x^{a} + (pq^{a+b})\varkappa 2.\,x^{a+b} + (pq^{a+2b})\varkappa 3.\,x\ldots}{q\varkappa 1.\,x + q^{1+b}\varkappa 2.\,x^{1+b} + q^{1+2b}\varkappa 3.\,x^{1+2b} + \text{etc}}$$

ten y ausgedrückt sind, eine von jenen
durch die andere (z durch x) auszudr
Man kann auch für p setzen $\frac{dz}{dy}$ (wenn nicht a
Wenn $A = 1$, $B = C = \ldots = 0$, so wird dar
bekannte Reversionsformel.

2. Allgemeiner ist:

$$\text{Wenn } z = Ay^a + By^{a+b} + Cy^{a+2b} +$$

$$x = \mathfrak{A}y^\alpha + \mathfrak{B}y^{\alpha+b} + \mathfrak{C}y^{\alpha+2b} +$$

$$z^m = \frac{1}{am}\left(px^{\frac{-am}{\alpha}}\right) \varkappa 1.\, x^{\frac{am}{\alpha}} + \frac{1}{am+b}\left(px^{\frac{-am-b}{\alpha}}\right) \varkappa$$

$$+ \frac{1}{am+2b}\left(px^{\frac{-am-2b}{\alpha}}\right) \varkappa 3.\, x^{\frac{am+2b}{\alpha}} +$$

wo $p \varkappa (n+1) = (am+nb)\, z^m \varkappa (n+1)$

oder auch $p = \frac{m z^{m-1} dz}{dy}$.

gegeben angenommen, die Coefficienten der Re
durch bestimmt sind, und vermittelst des
Theorems gefunden werden können.

2. Anders aber scheint es sich zu verhalten, w
die Coefficienten der Reihe p annimmt. Dann sch
der erste Coefficient derften Potenz von q, der z
(f+d)ten, der dritte der (f+2d)ten ... der (n+
(f+nd)ten Potenz, nemlich q^f ϰ 1, q^{f+d} ϰ 2, q^{f+2}
bestimmt zu werden. Jedoch zeigt eine nähere
tung, daß auch hier die Coefficienten der Reihe q
der Ordnung (mittelbar) bestimmt sind.

3. Der Beweis beruhet auf einer einfache
kung, die bey diesen Untersuchungen sehr in Be
kommt. Nemlich die n ersten Coefficienten de

*) Da diese sehr lehrreichen Bemerkungen über Coeffi
chungen, auf die unbestimmten Coefficienten z
hen (p, q) auch deren Potenzen und Produk
ziehen; da selbige durch meine Lokalzeichen und
veranlaßt und in ihnen vorgetragen, auch wegen de
sung auf meine combinatorische Darstell
Entwickelung ihrer Werthe (in 15) verwiesen
so ist die Stelle, welche ich diesem Aufsatze hier
habe, hinlänglich dadurch gerechtfertiget.

Hinden

4) Man kann diesen Satz allgemein so au
durch $q^{\mu} \varkappa (n+1)$, $q^{\mu} \varkappa n$, ... $q^{\mu} \varkappa 1$, werden
andern Exponenten m, auch $q^{m} \varkappa (n+1)$, q^{m}

$q^{m} \varkappa 1$ bestimmt. Man setze $q^{\mu} = p$, so wird

und nun darf man in (3) p für q, und $\frac{m}{\mu}$ für m

5. Mit Zuziehung dieses Satzes läßt sich
Behauptung in (2) darthun, und zeigen, d

*) Bekannt ist der Schluß: Wenn ein Satz **für** n g
er auch für $n+1$. Oefters muß man auch so schlie
ein Satz **bis** n gilt (d. i. für alle vorhergehende
$n = 1, 2, 3, \ldots n$), so gelte er auch für $n+1$ (de
genden Werth). Zuweilen ist auch **der** Schluß dien
ein Satz für $n-1$ **und** n gelte, so werde er auc
gelten. P.

**) *Kaestner Analys. inf.* §. 54; *Rothe l. c.* pag. 4
mel in Localzeichen ausgedrückt ist. P.

***) Man kann sich davon leichter durch die unmit
trachtung der Entwickelung von $(\alpha + \beta z + \gamma z^2 \ldots)^n$
$+ Cz^2 +$ etc überzeugen. Indessen schien mir die hi
Erläuterung für gegenwärtige Absicht fruchtbarer.

stimmt werden.

7. Die Gleichung in (1):

$$p\,\varkappa(n+1) = \frac{f}{f+nd}\, q^{f+nd}\,\varkappa(n+1)$$

ist also in Rücksicht auf p und auf q eine bestim[mte] Gleichung. Es entsteht nun die Frage, wi[e] in Rücksicht auf q (nach q) könne aufg[elöst] werden, da sie nach p keiner Auflösung bedarf.

Auflösung. Nach 1 (des vorhergehenden [...] Aufsatzes) folgt aus der angenommenen Gleichung

$$p^m\,\varkappa(n+1) = \frac{mf}{mf+nd} \cdot q^{mf+nd}\,\varkappa(n+[1])$$

Nun werde $mf+nd = 1$ gesetzt, so ist $m = \frac{1-[\ldots]}{[\ldots]}$

und $q\,\varkappa(n+1) = \frac{1}{1-nd} \cdot p^{\frac{1-nd}{f}}\,\varkappa(n+1)$. Dadu[rch ist] die Aufgabe aufgelöst. Zugleich erhellet, daß für [...] Potenz von q, $q^\lambda\,\varkappa(n+1) = \frac{\lambda}{\lambda-nd}\, p^{\frac{\lambda-nd}{f}}\,\varkappa(n+1)$

Für jede Potenz von q ergiebt sich, $\frac{mr + nd\mu}{e\mu} = \lambda$

$$q^{\lambda}\varkappa(n+1) = \frac{\lambda e}{\lambda e - nd} \cdot \left(\frac{f}{g}\right)^{\frac{\lambda e - nd}{f}} . p^{\frac{(\lambda e - nd)\mu}{f}} \varkappa$$

9. Es soll die Gleichung

$$p\varkappa(n+1) = (\alpha + \beta n) . q^{f+nd}\varkappa(n+1$$

nach q aufgelöset, d. i. die Coefficienten-Re q durch die von p bestimmt werden.

Auflösung. Man nehme eine dritte Reih daß $w\varkappa(n+1) = (\alpha+\beta n)(f+nd) f . p\varkappa(n+1)$, geben sich die Coefficienten von w, aus den angenon von p. Zugleich aber ist $w\varkappa(n+1) = \frac{f}{f+nd} . q^{f+nd}\varkappa($

also (nach 7) $q\varkappa(n+1) = \frac{1}{1-nd} w^{\frac{1-nd}{f}} \varkappa(n+$

ist demnach q durch w, folglich durch p bestimmt.

q bestimmt.

11. Aufgabe. Es sey $\mathfrak{N} p^{f'+nd'} \varkappa (n-$
$= N q^{f+nd} \varkappa (n+1)$, die Coefficienten von
denen von p zu finden.

Auflösung. Man nehme eine dritte Reih

daß $\frac{f\mathfrak{N}}{(f+nd) N} . q^{f'+nd'} \varkappa (n+1) = w \varkappa (n+1$

w durch p bestimmt, und, weil $q \varkappa (n+1)$

$$= \frac{1}{1-nd} . w^{\frac{1-nd}{f}} \varkappa (n+1) \text{, auch q.}$$

12. Die bisher (7—11) betrachteten Glei
gehören zu den einfachsten ihrer Art. Eine nähere
tung zeigt, daß es viel verwickeltere geben könn
können mehr als zwey Glieder enthalten, Produ
p und q und ihrer Potenzen, auch höhere Potenze
(z. B. n^2) in den Exponenten von p und q.

13. Daß, und wie solche Gleichungen bestim
läßt sich durch eben solche Schlüsse, wie in (5), d
Es sey z. B. $\mathfrak{N} p^{g+nc} \varkappa (n+1) + \mathfrak{N}' p^{g'+nc'} \varkappa$

ist. Nun ist für $n = 2$, $\mathfrak{B} = Bq^{f+d} \varkappa 2 + B'$

$+ B''q^{f''+d''} \varkappa 2 + \ldots$ Aber für jedes m ist

$q \varkappa 2 . (q \varkappa 1)^{m-1}$. Also wird $q \varkappa 2 =$

$$\frac{\mathfrak{B}}{B(f+d)(q \varkappa 1)^{f+d-1} + B'(f'+d')(q \varkappa 1)^{f'+d'}}$$

Eben so ergeben sich alle folgende Coefficienten v
von Potenzen von q, durch einfache Gleichunge
liche Schlüsse lassen sich in andern Fällen anbring

14. **Das allgemeine bey diese chungen kommt darauf an:** Sie fi
zwischen den unbestimmten Coefficienten zwey
(p, q) und deren Potenzen, auch Produkten dersel
den Faktoren der Glieder solcher Gleichungen,
den Potenzen von p und von q kommt, außer be
bekannten Größen, eine veränderliche (n oder n-
welche der Index der unbestimmten Coefficienten
ihre Stelle in den zugehörigen Reihen anzeigt.
lösung einer solchen Gleichung (nach p) beruh

daß man die Coefficienten der einen Reihe aus denen der andern findet, oder $p\varkappa(n+1)$ abgesondert darstellt, also die veränderliche Größe aus dem Exponenten von p wegbringt, davon absondert. Es lassen sich auch solche Gleichungen für mehrere Reihen, und sonst noch andere Verwickelungen denken. Gleichungen dieser Art scheinen mir am schicklichsten durch den Ausdruck: Coefficienten-Gleichungen, bezeichnet zu werden.

15. Als Postulate, oder vielmehr als bereits aufgelöste Probleme, müssen bey dieser Untersuchung folgende Sätze betrachtet werden: Wenn die Coefficienten von p und q gegeben sind, so sind auch die Coefficienten von p^m, q^μ; $p^m q^\mu$; $\frac{p^m}{q^\mu}$ gegeben; oder $p^m \varkappa(n+1)$, $q^\mu \varkappa(n+1)$; $(p^m q^\mu)\varkappa(n+1)$, $\left(\frac{p^m}{q^\mu}\right)\varkappa(n+1)$, sind durch $p\varkappa(n+1)$ und $q\varkappa(n+1)$ bestimmt. Es ist kaum nöthig zu erinnern, daß hiebey die Hindenburgische combinatorische Darstellung *) der Reihenglieder außer der Ordnung, unabhängig von den vorhergehenden, bey Potenziirungen **),

*) Zur Uebersicht und bey der Anwendung derselben dienen sehr gut Hrn. M. Töpfers VI. und VII. Tafel (Combin. Analytik ꝛc.) P. Man vergleiche auch meine Lokalformeln für das allgemeine Produktenproblem (Arch. der Math. H. II. S. 224—228.) H.

**) Dieses, so viel ich mich erinnere, bisher nicht gebräuchliche Wort, dessen sich Hr. Prof. Fischer bedient, scheint ganz passend zu seyn. Möchten wenigstens alle Neuerungen in der mathematischen Sprache immer so unschuldig bleiben, und ihrer Bestimmtheit und Einfachheit nie Abbruch thun! ein Wunsch, den manche Phänomene in den unruhigern Gegenden der literarischen Welt erregen können. (*Kaestner de polyedris* Comment. Soc. Goett. V. IX. Class. Math. p. 5. *Sunt quidem Mathematici de aptis nominibus solliciti, sed, quae semel in usum receperunt, difficulter mutant. Qua sermonis constantia id adsequuntur, ut veris inveniendis id operae et temporis tribuere possint, quod eiusdem rei plures appellationes sibi postulant in aliis eruditionis partibus, quas nominum copia per-*

und $q^{\mu} \varkappa(n+1) = \frac{\quad}{\mu \cdot nd} \cdot w^{I} \varkappa(n+1)$, a

w ausgedrückt *). Man hat aber auch ($p^m q^{\mu}$

$= \frac{N(f \dagger nd)}{Nf} w \varkappa(n+1)$, und wegen q^{μ}, nach

$\left(\frac{p^m q^{\mu}}{q^{\mu}}\right) \varkappa(n+1) = p^m \varkappa(n+1)$, fol

$p\varkappa(n+1)$. So können wenigstens die Coeffic
p und von q durch die angenommenen Coeffici

dit.) Wie lehrreich ist darin für den Mathematiker L
Beispiel, der zur Benennung einer neuen Wissens
dem Schüler der Rechenkunst bekannten, Worte
Endung gab, und die Operationen der neuen R
durch zwey eben so einfach gewählte Zeichen
(Vergl. Erxlebens Physik mit Zus. von Lic
Vorrede zur 6ten Auflage XXXVII, XXXVIII.)

Was Herr Prof. Pfaff in dieser Anmerkung g
neuerungen, Zeichenverstümmelung und Einführu
ger und unschicklicher Zeichen sagt, hat meinen gan
Doch soll, hoffentlich, für die Mathematik hier nic
ten seyn, obschon das seruum imitatorum pecus
fug stiftet. H.

*) Diese Redensart ist durch das Bisherige deutlich.

dritten Reihe w ausgedrückt werden. Bekanntlich löst man auch gewöhnliche Gleichungen zwischen y und x zuweilen so auf, daß man beyde durch eine dritte z ausdrückt.

Es eröfnet sich hier, wie es mir vorkommt, ein weites Feld für analytische Speculationen, die wenigstens durch ihre Schwierigkeit und Neuheit Interesse zu haben scheinen. Vielleicht möchten sie auch sonst nicht ganz ohne Nutzen bleiben.

einer in die Analysis einzuführende
meinen, größtentheils combinato
Charakteristik;

von

C. F. Hindenburg.

I. Die Combinationslehre ist eine selbstständ
wissenschaft; ihre Verbindung mit der An
engste und natürlichste.

1. Was den wichtigen Einfluß der
tionslehre auf die Analysis, die nothwendige
jener mit dieser, anbetrifft, so weiß ich darüber
seres zu sagen, als was Hr. Prof. Klügel i
handlung, welcher ich einige erläuternde A
beygefügt habe, bereits gesagt hat. Die,

kung derselben auf und in einander. Erläuternd
spiele dieser Art findet man unter andern im Arch
Mathematik in Menge, besonders in meinen Au
über combinatorische Involutionen, E
tionen und deren Anwendung, die in den vier ersten
zerstreut vorkommen. Betrachtet man, was man n
findet, mit einiger Aufmerksamkeit, so wird es schwe
den zu entscheiden, ob man die Mannichfaltigkeit od
Leichtigkeit der Darstellung und Umwandlung comb
rischer Formen mehr bewundern soll.

2. Die große Allgemeinheit, in welcher die
binationslehre ihre Elemente nimmt, indem sie bey
Operationen von aller Bedeutung und Einwirkun
selben auf einander abstrahirt, könnte (wenn man
sonst schon vom Gegentheil überzeugt wäre) leicht a
Vermuthung führen, eine solche Wissenschaft werd
Anwendung sich widersetzen, und so auf immer bloße
culation bleiben. Aber nein; die wirklichen Dinge
die man sie anwendet, bringen sogleich Leben un
deutung in die Sache. Man muß die Beschaff
ten dieser Dinge, ihr Verhalten gegen und ihre Wi

auf einander, aus der Wissenschaft, aus der Kunst, aus dem Fache, wohin sie gehören, erst genauer kennen; man muß wissen, was man durch Beyhülfe der Combinationslehre zu suchen hat, und so wird diese immer nachweisen, wie man es auf dem leichtesten Wege finden kann [a]).

3. Unter allen Anwendungen, die man von der Combinationslehre auf so verschiedene Gegenstände machen kann und bereits gemacht hat, ist keine inniger und natürlicher, als die auf die Analysis, in der weitläuftigsten Bedeutung des Worts, die Herr Prof. Klügel (in seiner obigen Abhandlung §. 3.) so gut aus einander gesetzt hat. Eine Aufgabe enthält gegebene und zu suchende (bekannte und unbekannte) Größen, nebst verschiedenen Bedingungen, die das Verhalten derselben gegen, und ihre Beziehung auf einander, ausdrücken. Die Formeln welche die unbekannten Größen durch die bekannten darstellen, was sind sie anders, als eine Verbindung der letztern, nach einem gewissen combinatorischen Gesetze? — Eine Funktion soll von der Gestalt, die sie hat, in eine andere Form von gegebener Art, umgewandelt werden? werden da nicht die Größen, auf die es bey der Umände-

a) So hat, um ein Beyspiel anzuführen, Bergmann die Zahl und Zusammensetzung der sogenannten zwey- drey- vier- fünf fachen (aus den zu seiner Zeit allgemein angenommenen fünf einfachen) Erden combinatorisch dargestellt, und dabey, zu genauerer Bestimmung der specifischen Verschiedenheit, nicht blos auf *indolem* und *numerum*, sondern auch, worauf bekanntermaßen so viel ankommt, auf das *pondus* der einzelnen Bestandtheile Rücksicht genommen, hat auch zu bequemerer Uebersicht, die aufgestellten Combinations- und Variationscomplexionen nach den *generibus* geordnet. Opusc. phys. chem. Tom. IV. p. 230 — 237. Ein anderes Beyspiel; Ebend. p. 244, 245. Da in der Chemie alles *Pondere*, *Mensura*, *Numero* zu beachten, so eröfnet sich hier ein weites Feld für solche und ähnliche Untersuchungen. Einen Versuch, die chemische Analysis mit der mathematischen zu verbinden, enthalten die neuerlich erschienenen Anfangsgründe der (chemischen) Stöcheometrie (1792—1794).

Augen liegen; daß sie oft sehr tief versteckt, und, selb
den scharfsichtigen Forscher, so gut als nicht vorha
sind; daß endlich, wenn auch Gesetze, selbst dem äuß
Ansehen nach ganz einfache und simple, sich ze
diese gleichwohl bey der Anwendung nicht selten in g
Schwierigkeit und Verwickelung führen, indem sich
ein ganzes Heer von beschwerlichen Substitutio
und Reduktionen entgegenstellt, welchem sehr
der Muth und die Geduld auch des unerschrocken
Rechners erliegen muß — davon habe ich die be
Hauptursachen (*Nov. Syst. Perm. p.* I, II. *not.* a) be
angegeben. Denn, einmal hat man zeither bey Auflö
der Aufgaben, bey Anordnung ihrer Formeln, bey
stellung und Umwandlung der analytischen Formen,
Permutationen, Combinationen und Va
tionen gar keine Rücksicht genommen; man hat au
so nothwendige Scheidung der heterogenen und Sa
lung der homogenen Elemente nicht gehörig geac
und so ungleichartige Dinge, Coefficienten und E
nenten, bestimmte und unbestimmte, beständige
veränderliche Größen, und das nicht selten aus
rern Reihen zusammen, durch ein und dasse

natorische, wie die gewöhnlichen auf arithme
analytische Operationen, hin. Ein sehr bedeut
zug meiner Zeichen, daß sie das thun, und d
alle übrige nicht-combinatorische Veränderung
ihnen nachweisen und anbringen lassen! Bey w
analytischen Untersuchungen und Rechnungen
man nur mit Verhältnissen, Relationen, G
Anordnung allgemeiner Formeln für die Endre
thun hat, kann man, statt der combinatorisc
und Formeln, ihrer **Stellvertreter**, de
und (es wird mir erlaubt seyn hinzuzusetzen)
vollen und faßlichen **Lokalzeichen** und **Fo**
bedienen, die man, sobald man will, in com
umsetzen, und daraus ihre Werthe in den geg
fachen Größen ausdrücken kann. Häufige B
nützlichen sehr weit ausgedehnten Gebrauchs
kalformeln findet man in Herrn Professor **Rot**
sertation: Formulae analytico-combi
de Serierum Reuersione demonstrati
nem Programm: Paralipomena ad Seri
uersionem; und in Herrn Prof. **Pfaff's** n

ben ist. Man erkannte und bewunderte die Vortheile
cher so ganz isolirt hingestellter Darstellungen b),
übersah dabey das Allgemeine c), das ihnen zum Gr
liegt (hier S. 97. Note f). Mir ist es gerade ebe
gegangen. Ohne eine ganz besondere Beharrlichkeit, j
so schwierige Gesetz der Formation der Coefficienten
Potenzgliedern eines Polynomiums (hier S. 83 No
zu entdecken und allgemein zu beweisen, würde ich
auf jene Lokalformel gekommen seyn, deren Auflösung
auf Combinationsverfahren leitete. Hierbey war mir
unbekannt, was de Moivre und Boscovich bey
dem Problem schon geleistet hatten; und das war
vortheilhaft für die Sache, denn sonst würde ich mich,

b) Mehrere solcher emphatischen Empfehlungen und bewun
den Aeußerungen, habe ich hier und da in meinen Schr
angeführt. Die Sache liegt, sowohl durch die aufgeste
Beyspiele selbst, als durch die dabey gegebene Nachweis
so offenbar vor Augen, daß es scheint, man hätte sie schon
langer Zeit nicht weiter übersehen, sondern vorlängst gene
siren, und in Richtigkeit bringen sollen. Aber — *ita fit
rumque: quae sunt ante oculos non videmus, facilia n
gimus, venamur difficilia.*

c) Selbst Bezout, der zwar viel allgemeine Sätze aufge
hat, die aber nicht selten auf verwickelte Operationen füh
an deren Stelle leichtere combinatorische stehen sollten.

Methodus potentiarum gegeben habe, du
Beyhülfe ich aus dem Polynomialsatze, in an
wandte und von ihm abhangende, wie auf ein
übergehen konnte. Dieser Satz, so wie andere
Folge gefundene, Sätze zeigten klar und deut
Combinationsmethode erstrecke sich noch viel wei
es lasse sich von derselben eine ganz allgeme
wendung auf die Analysis machen, wenn
Combinationslehre zuvor umstaltete, un
nehmlich durch Einführung von combinatorischen
nen nach festbestimmten Regeln, durch den Gebrau
licher und ausdruckvoller Zeichen u. s. w. zu dieser
dung bequem einrichtete. Was nun insbesondere
einzuführenden Operationen anbetrifft, so hatten
den von mir bereits aufgefundenen Discerptions
bey der Allgemeinheit und Bequemlichkeit, die si
Anwendung bewiesen, deutlich gezeigt, wie ich mi
der übrigen Operationen und Involutionen zu
habe; so wie sie auch überhaupt die Möglichk
combinatorischen Analysis, und was
fordert werde, deutlich durchsehen ließen. Diese

Schriften Anderer, die das combinatorische Ve
mit seiner Anwendung durch mündliche Vor
von mir haben kennen lernen, Rücksicht nehme
ich mich nun auf auswärtige Zeugnisse berufen k
auf die Erfahrungen der Herren Klügel, Kran
Pfaff, dieser vortreflichen Analysten, die, nach g
Prüfung der Sache, sehr vortheilhaft und öffentl
für gestimmt haben.

7. Die Gründe, auf welchen die Sache
verst tten nicht nur die ausgedehnteste Anwendung
dern sie sind auch über alles leicht; und die combina
Form kann, mit ihrer simpeln Bezeichnung, ohne
Vorbereitung, sogleich gefaßt werden. Die Co
tionslehre tritt hierbey, besonders was die Dar
und Entwickelung ihrer Formen, worauf in der A
doch so viel ankommt, anbetrifft, als selbststä
Grundwissenschaft auf, die, sich allein ge
fremder Hülfe nicht bedarf. Man kann zwar ari
tische Begriffe und Sätze auf combinatorische an
und hat solches bereits häufig und mit großem V
gethan; so daß man auch hier sagen kann

alterius f
Altera poscit opem res et coniurat amice

hier beysammen zu treffen. Es kann nicht schad
ist vielmehr Jedem, der sich mit der combinatorisc
lysis bekannt machen, und von ihrem Werthe
theilen will, zu rathen, sich von solchen Op
zuerst die nöthigen Kenntnisse zu erwerben
Erfahrungen haben mich gelehrt, daß ungünstige
über die Sache, größtentheils durch Mangel hi
genauer Kenntnisse der combinatorischen Arbeiten
chen, veranlaßt worden sind.

Rein = combinatorische Darstellungen von Per
nen, Combinationen und Variationen gege
Dinge.

9. Davon wird hier nur so viel beygebra
den, als wegen des Gebrauchs in Folgendem n
Man wird nicht erwarten, das bereits Gesagte
derwärts Bekanntgemachte hier blos wiederholt z

Nur bey einigen Auflösungen wird das, des Zusammenhangs wegen, der Fall, alles Uebrige aber neu seyn.

Ich kann voraussetzen, daß die Bedeutung der Wörter: Complexionen, Ordnungen, Classen, gutgeordnete Complexionen, gutgeordnete Classen oder Folgen von Complexionen, Combinationen und Variationen an sich (simpliciter) und zu bestimmten Summen, mit und ohne Wiederholungen, welche hier zunächst vorkommen werden, schon bekannt seyen. Man findet sie auch, zum Theil in den vorhergehenden Abhandlungen (z. B. in der von Herrn Prof. Klügel) bereits hier und da gebraucht. Ihre Erklärungen habe ich im *Nov. Syst. Perm.* gegeben; man vergleiche Toepf. comb. Anal. S. 47, 48, wo auch zugleich S. 49, 50 die vorzüglichsten und am häufigsten vorkommenden combinatorischen Zeichen erklärt werden. Nur wegen des bisher seltener, in dieser Schrift noch gar nicht, vorgekommenen Worts Ordnung muß ich erinnern, daß es sich auf die Anfangselemente der Complexionen bezieht, und daß alle Complexionen einer Classe zu einer Ordnung gerechnet werden, die mit einem und demselben Elemente anfangen. So gehören aaa, aab, aac, abb, abc, acc zu einer Ordnung, und eben so bbbb, bbbc, bbcd, bcde; jene zur Ordnung a der dritten, diese zur Ordnung b der vierten Combinationsclasse (*Nov. Syst. Perm. p.* VIII, 20).

10. Noch ist hier zu erinnern, daß ich die Gesetze der Fortschreitung der Zahlen, nach jedem System (und in der Folge auch die der lexikographischen oder alphabetischen Fortschreitung bey Wörtern) nach der Reihe und sprungweise, zum Grunde meiner Combinationslehre gelegt habe, bey welcher gutgeordnete Complexionen oder Folgen derselben, wie Zahlen

wachsen oder abnehmen (wie Wörter in alphabetischer Ordnung, vor oder rückwärts gelesen, auf einander folgen). Von den Vortheilen einer solchen Einrichtung (Arch. der Math. Heft I. S. 22 u. f.). Vom Gebrauche lexikographischer Anordnungen in der Analysis, mein Programm: Terminorum ab infinitinomii dignitatibus Coefficientes Moivraeanos sequi ordinem lexicographicum, ostenditur. Das Verfahren, nach welchem hierbey die gesuchten Complexionen, durch Zusammensetzung oder Absonderung ihrer Elemente, in horizontaler, verticaler oder aus beiden gemischter Richtung, sich ergeben verstattet immer, ein solches Verbindungsgesetz auszuwählen, welches das gesuchte Resultat leichter und geschwinder herbeyführt, als auf keinem andern Wege, durch kein anderes Verfahren, möglich ist.

(A) Versetzungen (*Permutationes*).

11. Aufgabe. Gegebene Dinge oder Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots\ldots \\ a & b & c & d & e & f \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

auf alle nur mögliche Arten zu versetzen.

12. Erste Auflösung. Aus der Anfangscomplexion abcd... oder 1234.... für n Dinge, suche man die nächstfolgende höhere (höhere oder niedrigere Complexionen sind hier mit größern oder kleinern Zahlen gleichgültig) und aus dieser wieder die nächsthöhere (immer aus denselben und gleichvielen Elementen bestehende) Complexion, und so fort, nach folgender Regel:

I. Man suche von der Rechten nach der Linken zu, das erste Element, das als ein niedrigeres oder kleineres, auf ein höheres oder größeres folgt;

II. Zu diesem niedrigern suche man, aus denen die ihm zur Rechten stehen, das nächsthöhere;

III. Man setze dieses höhere Element (II) in die Stelle des niedrigern (I) behalte die Elemente zur Linken (wenn dergleichen vorhanden sind) unverändert bey, und schreibe das niedrigere mit den übrigen, gutgeordnet, von der Linken nach der Rechten zu;

IV. Die Complexion, auf welche man die Vorschriften (I, II, III) nicht weiter anwenden kann, ist alsdann die letzte.

13. Exempel. Auf abcdef folgt abcdfe, und darauf abcedf, und dann abcefd, u. s. w. bis man auf die letzte Complexion fedcba verfällt, wo kein niedrigeres Element auf ein höheres folgt. Die punctirten Buchstaben sind hier die beiden Elemente der Auflösung I, II.

Eben so findet man die Versetzungen von 11222 nach der Ordnung:

11222	12212	21122	21221	22121
12122	12221	21212	22112	22211

die Regel erstreckt sich auf Zahlen- und Buchstaben-Complexionen mit gleicher Leichtigkeit, und schafft die gesuchten Complexionen, die gegebenen Elemente mögen nun alle verschieden, wie im ersten, oder einige davon einerley seyn, wie im letzten Falle.

Das zunächst folgende Verfahren will ich gleich auf einen bestimmten Fall anwenden; die Auflösung wird dennoch allgemein seyn (*Infin. Dignit. p.* 78, *not.*)

als einzelnes Ding. d)

1	2	3	4	a	b	c	d
1	2	4	3	a	b	d	c
1	3	2	4	a	c	b	d
1	3	4	2	a	c	d	b
1	4	2	3	a	d	b	c
1	4	3	2	a	d	c	b

II. Dem d setze man
vorhergehende Elemen
das giebt c d, die Ord
zwey Dingen c, d. Au
nung c findet man m
gende Ordnung d, w
und d gegen einander umtauscht. Das giebt zu
und dc, die beiden Versetzungen zweyer Din

III. Den einzelnen Complexionen cd un
setze man b vor. Das giebt die Ordnung b, a
man die Ordnung c, und aus dieser wieder die
findet, wenn man, im ersten Fall b, c mit c, b
ten c, d mit d, c verwechselt, und die so abgelei
plexionen unter einander schreibt. Das giebt

d) Ich werde hier in der Auflösung immer nur di
ben nennen, weil man sich die correspondire
leicht denken kann.

Eben so verfährt man bey mehr gegebenen Di
und mehrern Ordnungen derselben.

15. Das oben neben II beygefügte Schema
Ordnung 1 oder a, zeigt durch die eingezeichneten
kel, daß diese Auflösung zu den involutoris
gehöre (Arch. der Math. H. I. S. 24). Ein
deres gleichfalls involutorisches Verfahren, wo
Buchstaben (wie hier zwey) für jede Complexion au
tauscht werden, hat Herr Prof. Klügel (hier S.
angegeben. Meine Complexionen gehen unter sich
wachsende Zahlen fort, und sind zugleich lexikograp
geordnet (Arch. H. II. die Noten zu S. 166, 178).

16. Die erste Auflösung habe ich bereits in
ner Vorrede zu *Rüdig. Specim. anal. de lin. curv.*
ord. p. XLVI, XLVII. beschrieben. Bey dieser
den immer Complexionen aus Complexio
abgeleitet, jede nächstfolgende aus der unmit
bar vorhergehenden, und umgekehrt. Ein sol
Verfahren ist ganz allgemein und hat etwas Absol
Ich habe es daher auch bey andern combinatorischen
rationen in Ausübung gebracht, um so mehr, da es die

keit haben, wie für Zahlencomplexionen. Es
her nöthig, eine zweyte Auflösung beyzufügen,
cher Ordnungen aus Ordnungen, n
gende aus unmittelbar vorhergehende
gert werden; ein Verfahren, das sich durchgän
bey den übrigen hier aufzuführenden Operation
combinatorisch beweisen wird.

18. Um Weitläuftigkeit zu vermeiden, s
ich in ähnlichen Fällen (Arch. H. I. S. 25 u. f.)
ter Zahlencomplexionen aufgeführt habe, die A
gen hier und in der Folge in lauter Buchsta
plexionen, aufgestellt und zusammengesetzt

A	a	b	c	d
	aa	ab	ac	ad
B	ba	bb	bc	bd
	ca	cb	cc	cd
	da	db	dc	dd
	aaa	aab	aac	aad
	˶	˶	˶	˶
	ada	adb	adc	add
	baa	bab	bac	bad
	˶	˶	˶	˶
C	bda	bdb	bdc	bdd
	caa	cab	cac	cad
	˶	˶	˶	˶
	cda	cdb	cdc	cdd
	daa	dab	dac	dad
	˶	˶	˶	˶
	dda	ddb	ddc	ddd
	aaaa	aaab	aaac	aaad
D	u.	ſ.	w.	

	a	a	a	a
u.	a	a	a	b
	a	a	a	c
	a	a	b	a
	a	a	b	b
	a	a	b	c
	a	a	c	a
	a	a	c	b
ſ.	a	a	c	c
	a	b	a	a
	a	b	a	b
	˶		˶	
	a	b	c	c
	a	c	a	a
	a	c	a	b
	˶		˶	
	a	c	c	c
w.	b	a	a	a
	b	a	a	b

u. ſ. w.

alle übrige Variationscomplexionen der folge… den unmittelbar vorhergehenden, Classen.

20. Zweyte Auflösung. I. Die geg… zelnen Elemente a, b, c, d (gleichsam als so v… Ordnungen) setze man in die erste Classe 'A.

II. Den Unionen in 'A setze man sämtlic… ment a vor. Das giebt die Ordnung a; aus … durch Umtauschung des vorgesetzten a mit b, d… b; und aus dieser, durch Umtauschung des … b mit c, die Ordnung c; und daraus weiter, … tauschung des vorgesetzten c mit d, die Ordnun… nionen der zweyten Classe 'B findet.

III. Den Binionen in 'B setze man sämtl… ment a vor. Das giebt die Ordnung a der Ter… so weiter alle übrige Ordnungen derselben in … Classe 'C, wenn man (wie in II.) statt der suc… gesetzten a, b, c nun b, c, d setzt.

IV. Eben so erhält man, durch successiv… und Austauschen der Anfangsbuchstaben a, b, c

deutlich vor Augen.

22. Die Auflösungen (19, 20) der Aufgabe
sen beide auf die hier (18, α, β) vorgelegten S
mata. Indessen sind beide Darstellungen sehr von ein
der verschieden. In der ersten werden für jede einz
Complexion die vorzusetzenden Elemente mit den ü
gen immer ganz in die folgenden Classen hingeschr
ben; in der andern werden, für die Comlexionen der
sten Ordnungen a, diese a den zugehörigen Complexio
der vorhergehenden Classe nur vor-, die übrigen Ordn
gen aber, ganz ausgeschrieben, darunter gesetzt. D
giebt eine große Verkürzung und zugleich eine Involut
in aller Form. Sie stellt, eben so wie jene, Summ
von Classen, aber auch einzelne Classen, außer d
Ordnung dar, und zeigt beider Zusammenhang du
die figürliche Anordnug mit eingezeichneten W
keln.

23. Die Variationscomplexionen in (18, α und
beziehen sich sämtlich auf die einzige Reihe der gege
nen Dinge a, b, c, d . . . von denen also in jeder Cl

a,	b,	c,	d,	e,	f	. . .	=
𝔄,	𝔅,	ℭ,	𝔇,	𝔈,	𝔉	. . .	= s
	u.		s.		w.		&c

gegeben sind (wie hier, zeigerförmig beysamm
die Auflösungen (19, 20) ohne alle Schwierigke
dahin modificiren, daß jede einzelne Complexion
dieser Reihen enthält: die Unionen aus p, die
aus q, p, die Ternionen aus r, q, p, die Quatern
s, r, q, p u. s. w. für Variationscomplexionen folg
sen und mehrerer Elementenreihen. Man darf
Elementen a, b, c... die letzte Stelle in den Co
die sie (in 18, α, β) schon haben, lassen, in
Stelle aber A, B, C... und in die dritte a, b, c..
die vierte 𝔄, 𝔅, ℭ... u. s. w. bey Complexionen
rern Stellen, setzen, oder, während der Aufl
Darstellung selbst, zum Vorsetzen und Umtausch
telbar gebrauchen. Das ändert, wie man sie
in den Vorschriften der Auflösungen (19, 20)
eben so leicht A, B, C... und a, b, c... und
u. s. w. als a, b, c... vorsetzen und umtauschen

	bAa	bAb	bAc	bAd	s.	𝔄	bAa
	:	:	:	:		𝔄	bAb
	bDa	bDb	bDc	bDd		:	:
rqp 'C	cAa	cAb	cAc	cAd		𝔄	bCc
	:	:	:	:		𝔄	cAa
	cDa	cDb	cDc	cDd		𝔄	cAb
	dAa	dAb	dAc	dAd		:	:
	:	:	:	:		𝔄	cCc
	dDa	dDb	dDc	dDd		𝔅	aAa
srqp 'D	𝔄aAa	𝔄aAb	𝔄aAc	𝔄aAd	w.	𝔅	aAb
	u.	s.		w.	u.	s.	w.

und so kommen hier immer die Elemente jeder Reihe bener Dinge in eine bestimmte Verticalreihe zu st die Elemente von p in die erste, die von q in die zwe die von r in die dritte, die von s in die vi u. s. w. von der Rechten nach der Linken. Damit nun gleich sieht, auf welche Reihen sich jedes Classe chen bezieht und in welcher Ordnung: so findet man die Reihenexponenten p, q, r s ... (24) in bestimmter nung gleich über die Classenbuchstaben gesetzt.

26. Von diesen so angeordneten Complexionen aus den Elementen mehrerer Reihen, habe ich häufigen Gebrauch in der Anwendung gemacht. Dahin gehören die Tafeln (*Infin. Dign.* p. 172, 177 seq. und *Nov. Syst. Perm.* LXI. und LXIX. seq.). Die Zahlen in den dortigen Zahlencomplexionen sind wirklich variirt, d. i. auf alle mögliche Art combininirt und permutirt. Die Anwendung aber auf mehrere Buchstabenreihen (24, 25) giebt blos Combinationen der Elemente dieser Reihen. Das hebt zugleich eine scheinbare Schwierigkeit, auf welche Herr Prof. Fischer zu Berlin (Ueber den Ursprung der Theor. der Dimens. Zeichen (1794) S. 23) durch ein Misverständniß getroffen ist, indem er glaubt, so wie sich Combinationen, nach meinem Systeme, auf eine einzige Reihe gewöhnlich beziehen, eben so bezögen sich Variationen allemal auf mehrere Reihen; wider (23).

(B) Combinationen überhaupt, mit Wiederholungen.

(*Combinationes simpliciter, admissis repetitionibus*)

27. Aufgabe. Gegebene Dinge oder Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ a & b & c & d & e & f & \ldots \end{pmatrix}$$

zu combiniren, oder, nach zwey, drey, vier u. s. w. verbunden, in gut geordneten Complexionen und Classen darzustellen

	bcc	bcd		a|bbbb
		bdd		a|bbbc
	ccc	ccd		a|bbcc
		cdd		a|bccc
		ddd		a|cccc
aaaa	aaab	aaac	aaad	w. bbbbb
'D u.	s.	w.		bbbbc
				u. s. w.

28. **Erste Auflösung.** I. Die gegeben
mente setze man als einzelne Dinge (Vniones) in
Classe 'A.

II. Der Union a (in 'A) und allen folgend
man a; dann der Union b und allen folgenden, b
der Union c und allen folgenden, c; u. s. w. vor.
giebt zusammen die Binionen der zweyten Combin
classe 'B.

III. Den Binionen in 'B der Ordnung a un
folgenden, setze man a; denen der Ordnung b un
folgenden, setze man b; denen der Ordnung c un
folgenden, setze man c; u. s. w. vor. Das giebt zus
die Ternionen der dritten Combinationsclasse 'C.

men) die Ordnung b; und aus dieser, durch u
des vorgesetzten b mit c (von der Binion an,
zwey verschiedene Elemente vorkommen) die
und daraus eben so die Ordnung d; u. s. w. d
der zweyten Classe 'B findet.

III. Eben so findet man,

1) die Ordnung a der dritten, vier
haupt der nten Classe, wenn man den sämtli
xionen der (n—1)ten Classe, a vorsetzt;

2) die Ordnungen b, c, d... der nte
den Ordnungen a, b, c... derselben Classe, n
den Complexionen der nächstvorhergehenden
(von da an, wo zuerst die beiden Anfan
nicht einerley sondern verschieden sind) in d
ersten dieser beiden Anfangsbuchstaben den nä
Ordnungsbuchstaben setzt.

30. Die Auflösung (28) für die Com
von der für die Variationen (19) blos
schieden, daß die Buchstaben b, c, d... hier

α, β) gehen übrigens, wie jene der Variationen
wie wachsende Zahlen fort und sind zugleich lexikogra
geordnet (Arch. der Math. H. II. S. 178. Note).

(C) Variationen zu bestimmten Summen, m Wiederholungen.

(*Variationes numeri propositi, admissis repetition*

32. **Involutorische Darstellungen vo** dern combinatorischen deutlich zu unterscheiden, sollen und in der Folge *J*, 𝔍 und J, 𝕵 jene für Variati diese für Combinationen, gebraucht werden (Arch. Math. H. IV. S. 417, 418). Die einzelnen Ordnu der lexikographischen Folge, werden durch 𝔄, 𝔅, ℭ oder 𝔄, 𝔅, ℭ ... angedeutet (Ebend. S. 396 und Note, ingl. S. 430, 9).

23. **Aufgabe.** Die Variationen zu bestim Summen, aus den Elementen

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . & . & . \\ a & b & c & d & e & . & . & . \end{matrix}\right)$$

in gutgeordneten Classen darzustellen.

aaba	^5D	$^5\mathfrak{C}$		⎧c a a
abaa				⎩c b
baaa		$^5\mathfrak{D}$	w.	d a
aaaaa	^5E	$^5\mathfrak{E}$		e

34. Auflösung für $^5J = {}^5A + {}^5B + {}^5C$

I. Das 5te Element e setze man, als einze

in die erste Classe ^5A.

II. Die Complexionen der zweyten und al

den Classen bestimme man nach ihren Ordnunge

1) Die Ordnung a der nten Classe zu fi

man jeder Complexion der (n — 1)ten Classe a

vertausche den letzten Buchstaben der Complexio

nächstvorhergehenden des Zeigers.

2) Die so gefundene Ordnung a giebt di

b, diese die Ordnung c, u. s. w. derselben nten Cl

man successive in den Complexionen der nächstvo

den Ordnung, mit Uebergehung derer, die sich

M

plexionen verändert werden, welches dort nicht
war. Man hätte auch die Elemente a, b, c . .
Complexionen nach (19) vorsetzen, und die zu
rige Umtauschung des letzten Elements vornehme
nen. Dadurch aber würde die Auflösung an Simp
und Leichtigkeit etwas verlohren, dieselbe auch nich
combinatorisch, wie die hier (34) aufgeführte,
den seyn.

36. Auflösung für

$$^5\mathfrak{J} = {}^5\mathfrak{A} + {}^5\mathfrak{B} + {}^5\mathfrak{C} + {}^5\mathfrak{D} + {}^5\mathfrak{}$$

Die Complexionen zur Summe n werden hi
denen zur Summe (n—1) auf folgende Art abge

I. Man setze allen einzelnen Complexion
nächstvorhergehenden Summe (n—1) das Element

II. Man vertausche, in allen Complexion
Summe (n—1), das erste Element derselben m
nächstfolgenden des Zeigers, und schreibe jede Comp
die diese Vertauschung giebt, in ihrer Ordnung,
die Complexionen die I schon vorher gegeben hat.

37. Da bey den Buchstabencomplexionen zu bestimmten Summen, diese Summen sich auf die Ordnungszahlen beziehen, wie sie im Index oder Zeiger, (33) über den Buchstaben stehen: so erhellet deutlich, daß wenn man das Element a (oder 1) im ersten Winkel (33) setzt, man, nach dem obigen Verfahren (I, II) von da auf die Summe 2, und von dieser auf die Summe 3, u. s. w. auf die Summen 4, 5 . . . n successive fortschreitet. Diese involutorische Succession, nach welcher man vorhergehende und folgende Werthe in und um einander schreibt, ist gleichwohl mit einer absoluten Independenz vollkommen gleichgültig (Arch. der Math. H. III. S. 324, c) und so schreibt man nach ihr Summen von Classen eben so leicht als einzelne Classen, und umgekehrt, oder vielmehr, eins ist mit dem andern zugleich gegeben und innigst verbunden.

38. Von diesem Variationsproblem zu bestimmten Summen (33) meine erste Auflösung (*Infinit. Dign.* p. 129—135) für Summen von Classen, so wie für einzelne Classen. Eine zweyte Auflösung von mir hat Herr Mag. Toepfer (Comb. Anal. S. 77—80) beschrieben. Beide sind leicht und ganz allgemein, aber nicht reincombinatorisch, wie die hier (34, 36) beschriebenen, von denen ich die letztere zuerst in meinem Programm: Terminorum &c (der Titel steht hier S. 163) p. IV, 2 und im Arch. der Math. (H. IV. S. 393, A) in Zahlencomplexionen aufgeführt habe. Von diesen vier ganz verschiedenen Verfahren geben das erste Classen aus Classen, das zweyte Complexionen aus Complexionen, das dritte Ordnungen aus Ordnungen, das vierte Summenwerthe aus Summenwerthen; durchgängig nächstfolgende aus unmittelbar vorhergehenden. Die nähere Betrachtung der combinatorischen Operationen, besonders der Involutionen,

die Summe 5 oder ${}^5J$ (33) die Zahlen- und Buch-
complexionen nebst ihren Classenzeichen und den über-
benen Reihenexponenten p, q, r, s, t, wie folget:

p	p	p
5	${}^5\overset{p}{A}$	e
q —		q —
14		Ad
23		Bc
32	${}^5\overset{qp}{B}$	Cb
41		Da
r —		r —
113		aAc
122		aBb
131		aCa
212	${}^5\overset{rqp}{C}$	bAb
221		bBa
311		cAa
s —		s —
1112		𝔄aAb
1121		𝔄aBa
1211	${}^5\overset{srqp}{D}$	𝔄bAa
2111		𝔅aAa
t —		t —
11111	${}^5\overset{tsrqp}{E}$	α𝔄aAa

1|2 1 1	𝔄|b A a
1|2 2	𝔄|b b
1|3 1	𝔄|C a
1|4	𝔄|d
2 1 1 1	𝔅 a A a
2 1 2	𝔅 a b
2 2 1	𝔅 B a
2 3	𝔅 c
3 1 1	c A a
3 2	c b
4 1	D a
5	e

Hier ſtehen nåmlich in der erſten Buchſtabe[…] die Anfangsbuchſtaben der Alphabete für die […] s, r, q, p in ihrer Ordnung; jeder (nach 36[…] ſchreibende erſte Buchſtabe, wird aus dem […] den, noch nicht gebrauchten, Alphabete geno[…] (nach 36, II) durch Umtauſchung zuzuſetzen[…] aus dem Alphabete, wohin der auszutauſche[…] Das nenne ich, die Reihen p, q, r, s, t . . . hier[…]

(*Combinationes numeri propositi, admissis repetition*

41. Aufgabe. Die Combinationen zu best
ten Summen, aus den Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \\ a & b & c & d & e & f & g \ldots \end{pmatrix}$$

in gutgeordneten Complexionen und Folgen derselben
zustellen.

^7E	aaaac	$\mathfrak{B}$	bbc	
	aaabb		be	$^7\mathfrak{E}$
^7F	aaaaab	$^7\mathfrak{C}$	cd	$^7\mathfrak{F}$
^7G	aaaaaaa	$^7\mathfrak{G}$	g	$^7\mathfrak{G}$

42. Auflösung für

$^7J = {}^7A + {}^7B + {}^7C + {}^7D + {}^7E + {}^7F$

I. Das 7de Element g setze man, als einze
in die erste Classe ^7A.

II. Die Complexionen der zweyten und a
den Classen bestimme man nach ihren Ordnunge

1) die Ordnung a der nten Classe zu f
man jeder Complexion der (n—1)ten Classe (
gehung derer, die am Ende zwey oder mehr g l
mente haben) a vor, und vertausche den letzt
ben der Complexion mit den nächstvorhergeh
Zeigers.

2) Die so gefundene Ordnung a gieb
nung b, diese die Ordnung c u. s. w. derselben

dargestellt sind) die Ordnungen der zweyten Classe
jede hier nur aus einer Complexion besteht. C
ergeben sich die Ordnungen mit ihren Complexion
dritten und übrigen Classen.

43. Auflösung für

$$^{7}\mathfrak{J} = {}^{7}\mathfrak{A} + {}^{7}\mathfrak{B} + {}^{7}\mathfrak{C} + {}^{7}\mathfrak{G}$$

Die Complexionen zur Summe n werden hier aus
zur Summe (n—1), auf folgende Art abgeleitet:

I. Man setze allen einzelnen Complexionen der
me (n—1) das Element a vor.

II. Man vertausche in den Complexionen der
me n—1, (mit Uebergehung derer, welche zwe
mehr gleiche Anfangselemente haben) das erste E
mit dem nächstfolgenden höhern Elemente des
und schreibe jede Complexion, die diese Vertauschun
in ihrer Ordnung, unter die Complexionen die
vorher gegeben hat.

44. Auflösung für

$$^{7}\mathfrak{J} = {}^{7}\mathfrak{A} + {}^{7}\mathfrak{B} + {}^{7}\mathfrak{C} + {}^{7}\mathfrak{D} + {}^{7}\mathfrak{E} + {}^{7}\mathfrak{F}$$

I. Man setze allen einzelnen Complexionen der nächstvorhergehenden Summe (n—1), das Element a vor.

II. Man vertausche (aber nur in denjenigen Complexionen der Summe (n—1), bey denen die beiden ersten Elemente nicht einerley, sondern verschieden sind) das erste Element solcher Complexionen, mit dem nächstfolgenden des Zeigers, und füge solchem die übrigen Elemente der Complexion unverändert bey.

III. Die Complexionen (die I und II geben) mische man so unter einander, daß man zu jeder Complexion aus I die aus II setzt, wenn es dergleichen giebt. Giebt es keine in II (wenn nämlich der Complexion zur Summe n-1 erste beide Elemente nicht verschieden sind) so setzt man blos die aus I, und geht gleich zur folgenden Complexion der Summe (n—1) fort.

45. Die drey (in 41) aufgeführten Darstellungen sind dieselben in Buchstaben, die Herr Prof. Klügel (hier S. 59) in Zahlen vorgetragen hat, nur daß die dortige erste hier die letzte ist. Die Gesetze ihrer Entwickelung zeigen (42, 43, 44). Eine andere, von der (in 44) verschiedene, independente sehr leichte Auflösung, die aber nicht rein-combinatorisch ist, steht im Arch. der Math. H. IV. S. 404, 24, A. Die übrigen beiden Auflösungen (42, 43) sind blos beschränkte von denen (in 34, 36), wie beider Vergleichung sogleich zeigt. Auch hier kommt man (wie in 37 wegen 33 bemerkt worden ist) bey der Auflösung (43) nach und nach von der Summe 1 auf die Summe 2, von da auf die Summe 3 u. s. w. auf die Summe n, daß also auch hier diese involutorische Succession mit einer absoluten Independenz vollkommen gleichgültig ist.

aus Classen, oder Complexionen aus Complexionen, Ordnungen aus Ordnungen, oder endlich Summenw aus Summenwerthen, durchgängig nächstfolgende unmittelbar vorhergehenden, abgeleitet und rein-c natorisch entwickelt.

47. Gewöhnlich hat man bey Entwickelung Darstellung der Combinationsclassen nur auf eine a, b, c, d... = p zu sehen, und diese wird im Zeige gegeben, so, daß es keiner weitern Nachweisung be Classen selbst bedarf. Für die Fälle hingegen, w Combinationsclassen in der Formel, die das Result ner Aufgabe enthält, sich auf mehrere Reihen p, q, r, (24) beziehen, müssen diese Zeichen, als Reihen nenten, über die Classenzeichen gesetzt werden: ${}^{n}\overset{p}{A}$, ^{n} ${}^{m}\overset{q}{A}$, ${}^{m}\overset{q}{B}$... u. s. w. bey den übrigen (*Nov. Syst. P* *p.* XLV, 21). Zuweilen kommen auch ${}^{n}\overset{p}{A}$, ${}^{n}\overset{qp}{B}$, ${}^{n}\overset{rqp}{C}$ vor.

Man soll die vierte Variationsclasse z
6 aus a, b, c; und die vierte Combinatio
zur Summe 10 aus a, b, c, d, e, f, g darsteller

	a | a | a | c		a | a | a | g
	a | a | b b		a | a | b f
	a | a | c a		a | a | c e
	a | b a b		a | a | d d
^{6}D	a | b b a	^{10}D	a | b b e
	a | c a a		a | b c d
	b a a b		a | c c c
	b a b a		b b b d
	b b a a		b b c e
	c a a a		

50. Auflösung für die Var
classe ^{6}D.

I. Man setze c, das höchste der gegebenen
als ein einzelnes Ding, im Winkel.

II. Daneben setze man das erste Ding a. Das giebt ac, die Ordnung a der Dinge a, c. Aus der Ordnung a findet man (34, II, 2) die Ordnung b, und daraus die Ordnung c, der Binionen ac, bb, ca.

III. Den einzelnen Binionen in II setze man a vor. Das giebt die Ordnung a der Ternionen; und daraus findet man weiter (nach 34, II, 2) die Ordnung b und daraus die Ordnung c der zugehörigen Ternionen.

IV. Eben so geht man zu den Quaternionen für ^6D fort, und so auch zu den Verbindungen von mehr als vier Dingen, für spätere Classen; alles wie in (34), nur mit dem einzigen Unterschiede, daß man bey der Vorsetzung von a (bey Bestimmung der Ordnung a) das letzte Element der Complexion hier nicht (wie dort) mit dem nächstvorhergehenden Zeigerelemente vertauscht; wohl aber in den folgenden Ordnungen b, c...

51. Auflösung für die Combinationsclasse ^{10}D

I. Man setze g, das höchste der gegebenen Elemente, als ein einzelnes Ding, im Winkel.

II. Daneben setze man das erste Ding a. Das giebt ag, die Ordnung a der Dinge a, g. Aus der Ordnung a findet man (42, II, 2) die Ordnung b, und daraus die Ordnung c und daraus die Ordnung d der Binionen ag, bf, ce, dd.

III und IV. Das Verfahren für den Fortgang ist hier eben so, wie in 50, III, IV; nur daß hier (42) statt des dortigen (34) zu citiren. Auch hier wird, bey der Vorsetzung von a das letzte Element nicht mit dem nächstvorhergehenden vertauscht, wohl aber in den folgenden Ordnungen b, c ....

11	44		44	00	33
1	225	a^1	225	0	114
1	234		234	0	123
1	333		333	0	222
	2224	a^0	2224		1113
	2233		2233		1122

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$. $\Big($ $\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d & e \end{matrix}$

53. Bey den hier gebrauchten Zahlenc
fallen die in Winkeln eingeschlossenen Summ
deutlich ins Auge. Die a^3, a^2, a^1 deuten hie
beneinanderstellungen von a an, nach der beng
(diese Zahlen sind nemlich hier keine Potenz = so
derholungsexponenten) und a^0 zeigt
weiter in der Verbindung vorkommt. Man e
α wenn man von jeder Zahl in α Eins abzie
also der Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ a, & b, & c & \ldots \end{pmatrix}$ in $\Big($ $\begin{matrix} 0 \\ a, \end{matrix}$
abgeändert wird. Hier hat man nun die Ze

durch den zweyten Zeiger reducirt, und so alles i
gewöhnliche Gleis eingeleitet.

Das wird zugleich das (*Infin. Dignit p.* 141 in der Note, und *Nov. Syst. Perm. p.* XXII, 18) vo riationen Beygebrachte weiter aufklären. Von Un rung der Formen durch Zusetzen oder Abziehen ser Zahlen (wie hier der Eins) Arch. der Math. S. 41, 42. Von der Zerfällung einzelner höherer C nationsclassen in Summen aus niedrigern, mit Ve rung des Zeigers, *Nov. Syst. Perm. p.* LV, LVI. dortige n ist hier 6.

54. Bey Classen von vielen Complexionen kann um die Colonne nicht zu lang zu machen, die ein Ordnungen derselben neben einander setzen, auch zur kürzung, wenn man will, sich der Wiederholungsexp ten bey b, c, d... (eben so, wie in 52, 53 bey a) nen, die sich bey der Ableitung der Ordnungen aus ander (42, II, 2) von selbst ergeben.

Die erste Complexion in ^{15}E ist 1 1 1 1 11 (52, α) und 0000 10 (nach 52, γ). Das giebt

Die Zahlencomplexionen von ^{15}E, nach dem er
findet man (*Infin. Dign. p.* 80, 81).

Weil hier die Wiederholungen von a (als
der Dimensionen in den einzelnen Ordnungen)
vorgeschrieben werden, so kann a, und mithin
Zahlenwerth o, im zweyten Zeiger ganz überg
den. Ein Beyspiel ähnlicher Wiederholungen
stabens (b, wie hier a) findet man (*Infin. D*
bey Combinationen an sich (simpliciter). Ma
die erste Tafel (Ebend. p. 157).

55. Man kann auch nach dem (*Infin. D*
gegebenen Beyspiele, außer den Wiederholun
noch die Verbindungen von b, c, d, e... von
absondern. Die Ableitung der Ordnungen au
(42, II) führt auch hier unmittelbar darau
kommt:

56. Man kann also bey solchen Darstellung
einzelnen Classen (wie hier in 54, 55) durch die A
rung von a, **mehrere** a (ihre Wiederholungen) a
mal, wie vorher (51) **einzelne** a vorschreiben.
Darstellung für jede zu entwickelnde Classe lehrt jed
wie weit man mit den Wiederholungen von a fo
muß, die, für andere Classen und andere Summen
immer bis auf a^0 herunterfallen. Die zunächst, a
Wiederholungen von a folgenden Verbindungen von b
von bb, bc... von bbb, bbc... u. s. w. befolgen da
binatorische Gesetz in 27 (S. 174, α) nur daß m
b, c, d... für die dortigen a, b, c... schreiben, od
Zeiger $\left(\begin{matrix}1 & 2 & 3 & \ldots\\ b, & c, & d & \ldots\end{matrix}\right)$ für den dortigen $\left(\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ a, & b, & c\end{matrix}\right.$
nehmen muß. Von diesen Verbindungen hängen
mittelbar auf sie folgenden Binionen im Winkel ab
so gewährt hier die Combinationslehre einen Ueb
des Ganzen aus seinen einzelnen Theilen, den ma
keinem andern Wege in der Kürze und Vollkommenh
deutlich und anschaulich, haben kann.

57. Ein Beyspiel einer **gemischten** (nich
rein-combinatorischen) Darstellung hier zu geben

die Bestimmung der Complexionen dienen, die Herr Prof. Klügel (hier S. 61) aufgestellt hat.

Aufgabe. Die Complexionen der lexikographischen Ordnungen 2, 3, 4, 5 u. s. w. für ${}^{2n}\mathfrak{J}$ und ${}^{2n+1}\mathfrak{J}$, von der Ordnung 1 unabhängig, zu entwickeln.

Complexionen für ${}^{2n}\mathfrak{J}$ (2, 3, 4, 5, 6 ...)

	2 2 2 2 2 2
u.	2 2 2 2 4
	2 2 2 3 3
	2 2 2 6
	2 2 3 5
	2 2 4 4
	2 2 8
	2 3 3 4
s.	2 3 7
	2 4 6
	2 5 5
	2 10
	3 3 3 3
	3 3 6
	3 4 5
	3 9
	4 8
	5 7
w.	6 6
	12

u. s. w.

Complexionen für ${}^{2n+1}\mathfrak{J}$ (2, 3, 4, 5, 6 ...)

	2 2 2 2 2 3
u.	2 2 2 2 5
	2 2 2 3 4
	2 2 2 7
	2 2 3 3 3
	2 2 3 6
	2 2 4 5
	2 2 9
s.	2 3 3 5
	2 3 4 4
	2 3 8
	2 4 7
	2 5 6
	2 11
	3 3 3 4
	3 3 7
	3 4 6
	3 5 5
w.	3 10
	4 4 5
	4 9
	5 8
	6 7
	13

u. s. w.

man (mit Uebergehung aller derer, wo die beiden
oder letzten Zahlen, eins oder beides, nicht vers
den sind) die erste Zahl mit der nächstfolgenden
letzte mit der nächstvorhergehenden des Zeigers.
giebt die Ordnung 3 derselben Summe.

III. Dasselbe Verfahren auf die (nach II) gef
nen Complexionen angewendet, giebt die Complexione
Ordnung 4 aus denen der Ordnung 3 u. s. w. alle fol
Ordnungen aus den nächstvorhergehenden.

IV. Sobald man, bey Anwendung von II un
auf eine Complexion verfällt, die nur aus zwey,
chen oder um eins verschiedenen, Zahlen be
so nimmt man beider Summe, und setzt sie als letzte
plexion dieser Summe darunter.

Auf ähnliche Art kann man von der Ordnung 3
4... oder m anfangen, und auf die Ordnungen m-
m+2 u. s. w. fortgehen.

59. Wegen des Umstandes (58, IV) gehört das Verfahren zu den gemischten, und hat für Zahlencomplexionen keinen Anstoß. Um es auf Buchstabencomplexionen anzuwenden, darf man nur, auf diesen einzigen Fall, den Index vor Augen haben; alles Uebrige geht sonst rein-combinatorisch fort, wo der Gebrauch der Buchstaben gleiche Bequemlichkeit mit dem der Zahlen hat (17). Man hätte die Auflösung der Aufgabe (57) auch so geben können, daß man jede nächstfolgende Complexion aus der unmittelbar vorhergehenden abgeleitet hätte; aber hierbey würden sich, zu jenen arithmetischen Summen (58, IV) auch noch arithmetische Ergänzungen eingefunden haben, und so das combinatorische Verfahren, bey aller Leichtigkeit an sich, doch minder rein, als das in (58) geworden seyn. Die Darstellungen (in 57) enthalten alle (S. 61) vorkommende Complexionen der Summen 8, 9, 10 und noch mehrere, in einer lexikographischen Involution.

60. Ein Beyspiel, wie schnell die combinatorischen Formen (was für die Analysis so wichtig ist) sich in einander umwandeln lassen, mögen die (S. 59) von Herrn Professor Klügel aufgestellten drey Anordnungen zur Summe 7 abgeben. Von diesen ist die dritte die leichteste in der Entwickelung (S. 60. Note e). Aus ihr formt man die zweyte, wenn man von oben herunter gehend, erst die einzifrige (hier 7) dann die zweyzifrigen (1, 6 und 2, 5 und 3, 4) dann die drey- dann die vier- u. s. w. zifrigen Complexionen zusammenliest, die gleichvielzifrigen jedesmal in eine Classe zusammensetzt, und die letzte mit 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 (der einzigen siebenzifrigen Complexion) beschließt. Aus dieser zweyten Anordnung schafft man sogleich die erste, wenn man in der zweyten, von unten herauf steigend und rückwärts lesend, alle diejenigen Complexionen in eine Ordnung zusammensetzt, die (in dieser

zweyten) mit 1, oder 2, oder 3, u. s. w. mit 7, sich enden, und folglich mit diesen Elementen in der ersten anfangen. Man vergleiche die Anmerkung (S. 60). Auf ähnliche Art wird (Arch. der Math. H. II. S. 188) eine andere lexikographische Darstellung in eine Classenanordnung umgestaltet, oder, wie man sagen könnte, umgelesen.

61. Ich habe von den combinatorischen Operationen hier nur das Unentbehrlichste vorgetragen, das, was theils des Zusammenhangs, theils des Folgenden wegen, da seyn mußte. Die Operationen, wo Wiederholungen der Elemente verstattet sind, sind für die Analysis bey weitem die wichtigsten. Aus den Vorschriften für diese folgen zugleich die, wo keine Wiederholungen vorkommen dürfen; daher ich mich dabey so wenig aufhalte, als bey der Verschiedenheit der Zeiger, in Absicht auf die Folge oder Menge ihrer Elemente. Von der lexikographischen oder alphabetischen Darstellung, habe ich nur die zu bestimmten Summen hier (33, 41) aufgeführt. Ueberall sind hierbey Involutionen vorzüglich bequem, die hier nicht durchgängig durch eingezeichnete Winkel bemerklich gemacht worden sind; dahin z. B. die (27, α) aufgeführte gehört, eine der wichtigsten, die (*Infin. Dign. p.* 17, 18) etwas weiter ausgeführt ist, und sehr mannichfaltige Abschnitte durch einzuzeichnende Linien und Winkel verstattet, und so verschiedene Untersuchungen veranlaßt (Ebendas. S. 19 u. f.) wobey zu merken, daß die dort vorkommenden Zeichen keine combinatorischen, sondern blos willkührlich gewählte, sind.

62. Bey den Involutionen wird gewöhnlich ein Theil der Complexionen (die Ordnung 1 oder a, S. 162) durch bloßes Vorschreiben des ersten Elements, erhalten. Man sieht hier ein Schreiben der Elemente in die Tiefe (Arch. der Math. H. I. S. 15) oder in verticalen Colonnen; wovon die Zahlenreihe gleichfalls ein sehr einfaches

etc	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	0	0	0	0	0
u.	0	0	0	0	1
	0	0	0	1	0
	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	0
	0	0	1	0	1
	0	0	1	1	0
	0	0	1	1	1
s.	0	1	0	0	0
	0	1	0	0	1
	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	1
	0	1	1	0	0
	0	1	1	0	1
	0	1	1	1	0
	0	1	1	1	1
w.	1	=	=	=	=
	=	=	=	=	=
	1	1	1	1	1

u. s. w.

und belehrendes Beyspiel aufstellt. Ich will hier nur den Anfang des dyadischen Zahlensystems aus den beiden Grundzeichen 0, 1 beyfügen, wo die überschriebenen Potenzen der 2 anzeigen, wie vielmal jedes der beiden Elemente in jeder Verticalreihe, abwechselnd unter einander zu schreiben sey. Die hier eingezeichneten Parallelogramme (statt der sonstigen Winkel) zeigen jedesmal den Perioden der zusammengehörigen Ziffern in den Verticalreihen, der ohne Aufhören in die Tiefe hinab wiederholt werden muß. Bey Systemen von 3, 4, 5 oder mehreren Grundzeichen, würden die Wiederholungen der einzelnen Grundzeichen in den verticalen Reihen eben so durch die Potenzen der Zahlen 3, 4, 5 u. s. w. nachgewiesen werden. Bey dem dekadischen System kämen hier die Potenzen 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 u. s. w. vor.

63. Die unmittelbarste Anwendung zeigt die Variationsaufgabe (18), wo man die Vorschrift für die dortige Darstellung (β), nach (62) für ein triadisches System aus a, b, c hätte geben, und so, nicht blos wie dort die a, sondern auch die übrigen Elemente b, c nach senkrechter Fortschreitung in die Tiefe hätte schreiben können. Eine zweyte, aber nicht so unmittelbare, Anwen-

(I) Allgemeine Glieder für Classen und Verb... erste und einfachste Relationen in combina... schen Zeichen.

64. Ich habe den Vortrag der Vorschrift... die beygebrachten combinatorischen Operationen du... gleichen Glieder und Formeln nicht unterbrechen ... Sie sind aber wichtig und müssen daher nach... werden.

65. Allgemeine nte Classe der C... nationen überhaupt, mit Wied... lungen (27)

$$a^n + a^{n-1}\,'A + a^{n-2}\,'B + a^{n-3}\,'C \ldots + a^0\,'\mathcal{N} = \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ a & b & c & d & \ldots \end{pmatrix}$$

Da hier die Wiederholungen von a nach der Ordnu... geschrieben werden, so beziehen sich die Combinations... 'A, 'B, 'C . . . hier eben so auf b, c, d . . . wie (... auf a, b, c . . . und können auch die Werthe derselb... mittelbar (aus 27) abgeleitet werden, wenn m... die dortigen a, b, c . . . hier b, c, d . . . setzt.

die hier gebrauchten combinatorischen Zeichen A
sind deutlicher und verständlicher als die dor
führlichen Zeichen $\overset{1}{B}, \overset{2}{B}, \overset{3}{B} \ldots$

(G) Allgemeine Darstellung der Combination
bestimmten Summe n, mit Wiederholun

66. I. Für den Zeiger $\left(\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ b & c & d & e & \cdots\end{matrix}\right.$
die Auflösung (43) die Buchstabeninvolutio
verlangte Summe,

b	g		g
c	c d	b°	c c d
c	f		c f
d	e		d e
h			h
&c	&c		

Eben das giebt die zweyte Darstellung (in 41) wen
darinn b, c, d ... statt a, b, c ... setzt.

II. Die erste Darstellung in I zeigt nur den A
für das unbestimmte ${}^{n}\mathfrak{J}$. Dieser bleibt, wegen
volutorischen Fortschreitung, bey jedem höhern
für n derselbe; auch fällt der Fortgang nach den
Gesetze (43) klar in die Augen, und hat nicht
ringste Schwierigkeit.

III. Die Complexionen zwischen jedem P
horizontaler Linien haben immer eine gleic
zahl von b vorgeschrieben, die niederwärts successi
Eins abnimmt. Drückt man diese Mengen durc
derholungsexponenten (53) aus, so rechtfertig
die Darstellung von ${}^{7}\mathfrak{J}$ in I, wo die Wiederholung

wenn man

Anfang
en der in-
n Werthe
demselben
ht die ge-

Paart
eiche An-
essive um
rch Wie-
igt das
gen von

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ b & c & d & e & \cdots\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdot \\ c & d & e & f & g & .\end{pmatrix}$$

Der Zeiger **linker** Hand gehört zu $^{n}\mathfrak{J}$, linke
Gleichheitszeichens; der Zeiger **rechter** Hand
gen Involutionen. Die Entwickelung ihrer G
nachstehende **lexikographische Involut**

$+ b^{n-8}\ {}^{8}\mathfrak{J} =$	$b^{n-8}[c^4, c^2e, cd^2, cg, df, e^2, i]$
$+ b^{n-9}\ {}^{9}\mathfrak{J} =$	$b^{n-9}[c^3d, c^2f, cde, ch, d^3, dg, ef, k$
$+ b^{n-10}\ {}^{10}\mathfrak{J} =$	$b^{n-10}[c^5, c^3e, c^2d^2, c^2g, cdf, ce^2, c$ $dh, eg, f^2, l]$
$+ b^{n-11}\ {}^{11}\mathfrak{J} =$	$b^{n-11}[c^4d, c^3f, c^2de, c^2h, cd^3, cd$ $ck, d^2f, de^2, di, eh, fg, m]$
&c &c	
$\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ c & d & e & f & \cdots \end{matrix}\right)$	u. s. w.

Das ist das allgemeine Schema, davon die Anfän
meinem oben (S. 163) erwähnten Programm un
Archiv der Math. (H. IV. S. 390, 393, 395) vo
men. Die Complexionen in den Klammern (deren
men immer mit der von n an b abgezogenen Zahl üb
kommen) sind hier, zu Ersparung des Raums, n
einander, nicht, wie dort (und hier in 66, I)
einander geschrieben.

67. Diese Darstellung gehört zu den Involut
der vollkommensten Art, und gewinnt durch den
meinen Ausdruck, beides an Kürze und Bequemlichke
gleich.

so findet man daraus das neuanzufügend…
wenn man 1) allen Complexionen für $^{m-2}$…
vorletzten Gliede in der Klammer stehen)…
staben c vorsetzt 2) in denjenigen Complexione…
(die im letzten Gliede in der Klammer stehen) …
ungleiche Anfangsbuchstaben haben, den ersten…
mit dem nächstfolgenden des Zeigers vertau…
Complexionen, wie man sie (nach 1 und 2) ge…
in ihrer Ordnung, neben b^{n-m} in die Klammer…
sieht man, wie man z. B. für $m = 11$, …
$b^{n-11}\ {}^{11}\mathfrak{J}$ aus den beiden vorhergehenden b…
$b^{n-10}\ {}^{10}\mathfrak{J}$ hat finden können. Auf diesem…
Wege ist obige Darstellung, aus den Anf…
$b^{n-1}b$, $b^{n-2}c$, $b^{n-3}d$ construirt worden; und d…
let, daß man die Wiederholungsexponenten…
eben so leicht bey c, d, e, f . . . als bey b anb…
zu nicht geringer Verkürzung im Vortrage, u…
durch die Vortheile der Involution aufzuhe…
vernichten.

b^{n-4}	e	c^2			
b^{n-5}	f	cd			
b^{n-6}	g	ce d^2	c^3		
b^{n-7}	h	cf de	c^2d		
b^{n-8}	i	cg df e^2	c^2e cd^2	c^4	
b^{n-9}	k	ch dg ef	c^2f cde d^3	c^3d	
b^{n-10}	l	ci dh eg f^2	c^2g cdf ce^2 d^2e	c^3e c^2d^2	c^5
b^{n-11}	m	ck di eh fg	c^2h cdg cef d^2f de^2	c^3f c^2de cd^3	c^4d
0	1	2	3	4	5 . . . .

stehenden Complexionen (2) gehören so zusamm
erstern jeder einzelnen Complexion vorgesetzt
verbunden gedacht) werden müssen.

4) Die Zahlenwerthe der Buchstaben in
lung (68) giebt der Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ b & c & d & e & f & g & \ldots \end{pmatrix}$$

Dieser bringt durchgängig die Glieder (in 3)
Summe n. Die Summe in den einzelnen C
(2) ist nehmlich immer so groß, als die Zahl,
b abgezogen wird.

5) Das Absondern niedrigerer
aus höhern geschieht hier durch Ziehung eines
striches, auf eben die Art, wie in (S. 203
auch der Fortgang für höhere Involu
Anfügung neuer Glieder an die gegebenen.

6) Die Vertical=Reihen oder Colonne
plexionen in den Fächern sind unten, nach d

II. Die übrigen Colonnen und Fächer mit Complexionen, z. B. Col. n⁊m, findet man, wenn allen um zwey Fächer höher liegenden Complexion der nächstvorhergehenden Colonne [allen Complexion Col. (n—1) ⁊ m] den Buchstaben c vorsetzt; 2) Complexionen, die unmittelbar über dem Fache l dessen Complexionen man sucht [in den Complexion Col. n⁊(m—1)] mit Uebergehung derer, die zwey g Anfangsbuchstaben haben, den ersten Buchstaben mi nächstfolgenden des Zeigers vertauscht, und 3) die 1 und 2) gefundenen Complexionen, in Col. n⁊m na rer Ordnung setzt.

Für m=1 wird ⁊(m—1)=0. Es giebt neh nirgends ein Fach über den ersten, also auch für Col. nichts umzutauschen.

71. Für jeden bestimmten Werth von n in (68) für n=10, sind b^{n-10} mit den zugehörigen, rechter daneben stehenden Complexionen die letzten, mit dene Darstellung abbricht, so, daß b^{n-11} mit allem was d ben und darunter steht, für den Werth von n=10,

(für n=10) vorkommt.

72. Exempel. Die Complexionen für

$$^{10}E\left(\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\\ b&c&d&e&f&g\end{array}\right)$$ aus (68) anzugeben.

Für n=10 findet man nach (71) aus (68)

$$^{10}E = b^4\,\underline{|g} + b^3\begin{array}{|l}cf\\ \underline{de}\end{array} + b^2\begin{array}{|l}c^2e\\ \underline{cd^2}\end{array} + b^1\,\underline{|c^3d} -$$

Die Complexionen sind hier (nach 54) neben geordnet. Eine von (68) unabhängige inv Darstellung derselben unter einander gäbe (5 man mit ^{10}E eben so verführe, wie dort mit ^{10}D die dortigen a, b, c ... hier b, c, d ... setzte. Die nung wäre einerley mit der, wenn man die hi denen Complexionen ganz ausgeschrieben (ohne lungsexponenten) unter einander setzte.

73. Zöge man (wie in 52, 53) von jeder Zeigers (69, 4) Eins ab, d. i. nähme man a

Zeigers $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ b & c & d & \ldots \end{pmatrix}$ für (68) nun $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$ so würde das einen Einfluß auf die Summen der einzelnen Complexionen in den Fächern der einzelnen Verticalreihen haben. Sie würden sämtlich niedrigere Summen darstellen als jene; die Complexionen in der ersten Verticalcolonne um 1; die in der zweyten um 2; die in der dritten um 3; u. s. w.

74. Diesen Unterschied anschaulich darzustellen, darf man nur, statt der einzelnen Complexionen, das zugehörige Classenzeichen in die Fächer setzen. Das giebt

(α) für 68

b^{n-1}	b				
b^{n-2}	^{2}A				
b^{n-3}	^{3}A				
b^{n-4}	^{4}A	^{4}B			
b^{n-5}	^{5}A	^{5}B			
b^{n-6}	^{6}A	^{6}B	^{6}C		
b^{n-7}	^{7}A	^{7}B	^{7}C		
b^{n-8}	^{8}A	^{8}B	^{8}C	^{8}D	
b^{n-9}	^{9}A	^{9}B	^{9}C	^{9}D	
b^{n-10}	^{10}A	^{10}B	^{10}C	^{10}D	^{10}E
b^{n-11}	^{11}A	^{11}B	^{11}C	^{11}D	^{11}E
u.	s.	w.	f.		

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots \\ c & d & e & f & g & h & i & k & l & m & \ldots \end{pmatrix}$

(β) nach 73

b^{n-1}	b				
b^{n-2}	^{1}A				
b^{n-3}	^{2}A				
b^{n-4}	^{3}A	^{2}B			
b^{n-5}	^{4}A	^{3}B			
b^{n-6}	^{5}A	^{4}B	^{3}C		
b^{n-7}	^{6}A	^{5}B	^{4}C		
b^{n-8}	^{7}A	^{6}B	^{5}C	^{4}D	
b^{n-9}	^{8}A	^{7}B	^{6}C	^{5}D	
b^{n-10}	^{9}A	^{8}B	^{7}C	^{6}D	^{5}E
b^{n-11}	^{10}A	^{9}B	^{8}C	^{7}D	^{6}E
u.	s.	w.	f.		

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots \\ c & d & e & f & g & h & i & k & l & m & \ldots \end{pmatrix}$

Beide, dem äußern Ansehen nach ganz verschiedene, Schemata α und β, geben, jedes auf den unten beygefügten Zeiger bezogen, die Complexionen der Darstellung (68).

und Anordnung (68) ist, bey ihrer Allgemeinhei
äußerst leicht, und verstattet, die Wiederholungs
bey den Elementen der Complexionen unmittel
bringen, ohne die Involution zu zerstören.

2) Die Wiederholungen von b, so wie die
drey-vier-. . . . buchstabigen Complexionen aus
sind in einzelne Verticalreihen, nach
nung, classenweise (nach gleichnamigen Classen
verschiedenen Summen) gesondert, jene nach
diese nach steigenden Summenexponenten (74)

3) Die Complexionen in den einzelnen
talreihen oder Fächern hinter dem Doppelst
einzelne Classen für sich, nach dem beygefügt
dar. Auf die nebenstehenden b zugleich mit bez
es diejenigen Complexionen, die immer eine glei
vorgesetzter b enthalten.

4) Die zusammengehörigen Elemente de
graphischen Ordnung aus b, c, d ... findet

D

der Werth n = 11 giebt auch die sämtlichen Cla
Summe 11, davon in jener Tafel nichts vorhan
Die Buchstabencomplexionen der Tab. V (*Infin.*
p. 167) aus (68) zu schreiben, darf man nur

statt b, c, d, e, f, g, h, i, k, l (in 68)
hier α, β, γ, δ, ε, ζ η, θ, ι, κ setzen.

7) Obschon hier nach der Vorschrift (70,
folgende Complexionen und Fächer aus vor
henden abgeleitet werden, so kann man gleichw
einzelne Vertical- Horizontal- und Diagonal-Reih
Fächer ganz independent von andern, außer der Or
schaffen. Das giebt insonderheit (74, β) klar un
lich zu erkennen, weil man die Complexionen jede
und Summe unmittelbar darstellen kann (49, 51,

77. Das zusammen zeigt die Güte und Vor
keit sowohl der combinatorischen Methode überhaup
der Darstellung (68) insbesondere. Simplicit
Allgemeinheit bey der Entwickelung, Kürze und D
keit bey der Anordnung, Mannichfaltigkeit und L
keit bey der Anwendung, sind hier aufs innigste m

ander verbunden. Das ist die (S. 54 Note c) versprochene endliche Vollendung. Was Herr Prof. Klügel in der dortigen Note von den Vorzügen der combinatorischen Involutionen überhaupt sagt, das gilt, in einem eminenten Grade, vornehmlich von dieser letzten, noch mehr als von jener andern in (65) nach welcher die in (68) im Ganzen geformt, und, mutatis mutandis, eingerichtet ist. Die allgemeine Formel, deren nähere Entwickelung die Darstellung (68) giebt, wird in Folgendem vorkommen.

78. So viel schien mir nöthig, von den combinatorischen Operationen, vorzüglich den Involutionen, im Zusammenhange hier beyzubringen. Die Aufführung bestimmter Vorschriften für die Entwickelung und Darstellung dieser Operationen ist unumgänglich nothwendig. Sie betrifft die unmittelbare Anwendung der allerersten Gründe der Sache, und darf der Willkühr des Lesers nicht überlassen bleiben. Auch würde dieser nicht (selbst nicht einmal der geübte Analyst, sogleich und auf der Stelle) immer die kürzesten, und für gewisse Absichten zunächst passenden Regeln und Vorschriften auffinden. Auf solche muß man sich also beziehen können, und darum müssen sie auch irgendwo deutlich verfaßt und beschrieben vorhanden seyn. Die Sache (deren Nothwendigkeit gleichwohl einmal ist bezweifelt worden), so angesehen, spricht für sich selbst, und Herr Prof. Klügel ist derselben Meynung (S. 89). Hinterher kann Jedem freystehen, und es wird auch keine Schwierigkeit haben, die Vorschriften nach Gefallen für sich abzuändern, nach Umständen zu erweitern und durch neue zu vermehren.

79. Ich hoffe, die Leichtigkeit der hier angewiesenen Verfahren wird dem Leser von selbst einleuchten. Sollte aber diese combinatorische Theorie, so einfach sie an sich

einer einzigen sehr einfachen Voraussetzung
„Veränderungen bey rein-combinatorischen Verrich
„lassen sich auf bloßes Ansetzen oder Beyfügen, V
„men oder Absondern, Aus- oder Umtauschen der v
„benen Elemente, zurückführen (S. 161, 7)."

Vergleichung der Zeichen für combinatorische rationen; einfachste Relationen derselben in d sen Zeichen.

80. Die Zeichen selbst, so viel deren hier au ren nöthig schien, sind schon im Vorhergehenden Hier kommt es nur auf ihre Vergleichung gegen ei an, und wie sich combinatorische (und in der Fol analytische) Sätze bequem durch sie ausdrücken las

(α) Variationen überhaupt, mit Wiederholu

Var (a b c d . . .) *simpl*

81. $'J = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E \ldots +$
(a b c d e . . .)

chen, durch den beygefügten Zeiger nachweisen.

$$Perm\,(a^4 b^3) = Perm \begin{pmatrix} 1111222 \\ aaaabbb \end{pmatrix} =$$

$$Perm\,(a^3 b^2 c^4) = Perm \begin{pmatrix} 111223333 \\ aaabbcccc \end{pmatrix} =$$

Die Auflösung giebt (12) wie bey dem dorti
(13). Sie ist nehmlich eine bequeme Auflösu
Fall, Permutationen als (beschränkte) Varia
zu betrachten, in welchen bestimmte Elemente,
nur nach einer bestimmten Anzahl,
Das kann man sehr bequem (wie hier) durch
Wiederholung der Elemente ausdrücken,
sammen die erste Permutationscomplexion (
präsentantinn aller übrigen) darstellen.

$$Perm\,(abcd) = Perm \begin{pmatrix} 1234 \\ abcd \end{pmatrix} =$$

Die Auflösung giebt (12) und steht vollende
Auch hier hat man bequeme Auflösungen für

(β) Combinationen überhaupt, mit Wiederholu

Comb (a b c d . . .) *simpl*

83. 'J = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E . . . +
(a b c d e . . .)

Die einzelnen Classen 'A, 'B, 'C . . . stehen in (27, α
Involution 'J in (27, β). Auch hier sind den Zei
und 'A, 'B . . . die Elemente (a, b, c, d . . .) unter
gefügt (80).

*) Man könnte auch die Combinationen (wie hier die Pe
tionen) als beschränkte Variationen ansehen, deren
plexionen sämtlich gut geordnet wären, und in dieser
sicht nur eine einzige combinatorische Operation, d
riation, annehmen. So wahr das an sich ist, und
das Ganze dadurch an Simplicität gewinnt, so ist es d
besser, bey dem Vortrage der ersten Gründe der Wisse
von dieser Allgemeinheit nicht auszugehen, und die dre
binatorischen Operationen als besondere ihrer Art anzu
um so mehr, da diese Unterschiede beym Gebrauche häuf
kommen. Beym Vortrage der Regeln hingegen, kann
auf diese Dependenz Rücksicht nehmen; daher ich au
Vorhergehenden die Verfahren für Variationen, den
Combinationen vorgesetzt, der letztern Abhängigkeit vo
ersteren gezeigt, auch hier, wegen der Permutationen, au
riationen verwiesen habe.

Einzelne Classen durch Summen von Classen (65).

$$84.\ {}'\mathfrak{N} = a^n + a^{n-1}\,{}'A + a^{n-2}\,{}'B + a^{n-3}\,{}'C \ldots + a^0\,{}'\mathfrak{N}$$
$$(a\ b\ c \ldots) \qquad\qquad (b\ c\ d\ e \ldots)$$

Die Classen 'A, 'B, 'C ... giebt (27, α) nur daß man hier b, c, d ... statt der dortigen a, b, c ... brauchen, oder die erstern für die letztern setzen muß. Die Beschaffenheit, die Zahl, der Ort der unten beygefügten Elemente zeigt nehmlich jederzeit, was für Elemente für die Entwickelung und Darstellung der darüberstehenden Classen zu gebrauchen.

Folgende Classen aus unmittelbar vorhergehenden (27, 28).

$$85.\ {}'\mathfrak{N} = a\,{}'\overset{-1}{\mathfrak{N}} + b\,{}'\overset{-1}{\mathfrak{N}} + c\,{}'\overset{-1}{\mathfrak{N}} \ldots + \psi\,{}'\overset{-1}{\mathfrak{N}} + \omega\,{}'\overset{-1}{\mathfrak{N}}$$
$$(ab..\psi\omega)\ (ab..\omega)\ (bc\,.\omega)\ (cd..\omega) \quad (\psi\omega) \quad \omega$$

Diese Formel enthält die Auflösung (28), symbolisch dargestellt. Bey dieser werden nehmlich die Ordnungen jeder folgenden Classe $'\mathfrak{N}$, aus den Ordnungen der unmittelbar vorhergehenden $'\overset{-1}{\mathfrak{N}}$, durch successives Vorschreiben der Buchstaben a, b, c ... gefunden.

Complexionen mit einerley Endbuchstaben.

$$86.\ (1 + {}'A + {}'B + {}'C + {}'D + {}'E \ldots + {}'\overset{-1}{\mathfrak{N}})\,q$$
$$(a\ b\ c\ d\ e \ldots q)$$

Nämlich, für den Endbuchstaben q, durch alle Classen, von der ersten bis mit der nten; und so auch für andere Endbuchstaben und Classen.

In der Anwendung kommen (86, 87) weit seltene
vor, als (84, 85). Hier sollen sie blos zeigen, wi
außerordentlich leicht solche Forderungen combinatorisc
sich abthun lassen. Die Formeln (85, 87) geben Bey
spiele von Veränderung der Elemente, in Absicht au
Menge und Beschaffenheit, wo man zugleich mi
auf den Ort sehen muß (84) wo sie stehen. Verschie
dene Elemente (auch Zeiger) kommen nicht selten bey ei
ner und derselben Formel vor, und werden mit großen
Nutzen gebraucht. Die oben beygefügten Buchstabenele
mente beziehen sich auch hier zunächst, wie die Zahlenele
mente bey der Aufgabe (S. 193), auf die durch sie zu
bezeichnenden Ordnungen.

(γ) Variationen zu bestimmten Summen, mit Wiederholungen.

$$Var\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ a & b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix} num.\, n \;*)$$

*) Bey den Operationen zu bestimmten Summen, wen
man sie auch schon von Zahlen unabhängig (33 — 36, 41 —

$$90.\ {}^{n}\underset{\dots tsrpq}{J} = {}^{n}\underset{p}{A} + {}^{n}\underset{qp}{B} + {}^{n}\underset{rqp}{C} + {}^{n}\underset{srqp}{D} + {}^{n}\underset{tsrqp}{E} +$$

(Der Zeiger, wie in 24)

Wegen der lexikographischen Anordnung fü
sehe man die Darstellungen in (40).

(δ) Combinationen zu bestimmten Summen,
Wiederholungen.

$$Comb \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ a & b & c & d & e & \dots \end{pmatrix} num.\ n$$

44, 49—51) darstellen kann, muß man doch, Za
Buchstaben, wie sie zusammengehören, im Zeiger
weil die Summenexponenten der Classen von den Z
then abhangen, und bey andern Zahlen anders
(73, 74); und so muß man den Zeiger (wie hier in
den einzelnen Elementen, Buchstaben (84, 8
oder Zahlen (57, S. 193) unterscheiden. Zuweilen
den Zeiger, wo einzelne Elemente zureichten (11, 14,
anzudeuten, die Regeln der Operationen erstrecken
leicht auf beiderley Elemente.

gen der gebrauchten Zeichnung für lexikographische Ord-
nungen überhaupt (Ebendas. S. 396. Note) für Fälle
wo die Combinationsclassen noch mit Reihenexponen
ten zu versehen sind, hier (47).

Höhere Involutionen, aus nächstverhergehenden niedrigern. *)

$$93.\quad {}^{n}\mathfrak{J} \;=\; 1\;{}^{n-1}\mathfrak{J} \;+\; {}^{n}\dot{\mathfrak{J}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ a & b & c & d & e & \cdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ b & c & d & e & \cdots \end{pmatrix}$$

*) Von einer andern Zusammensetzung höherer Involutionen au
niedrigern, wo der Zeiger mehrmals verändert wird (Arch
der Math. H. IV. S. 418, d). Statt des dortigen [J1] mu
das hiesige $\mathfrak{J}$ gesetzt werden, welches damals bey dem Druc
nicht zur Hand war. Dieser Umstand hat veranlaßt, daß, d
Analogie wegen (Ebend.) auch [Js] gesetzt werden mu
te, wo das hiesige J allein hinreichend gewesen wäre. Ebe
so ist, in Herrn von Prassens Abhandlung (man sehe hi
S. 86, m) aus Mangel der zugehörigen Typen, überall J un
$\mathcal{J}$ statt $\mathfrak{J}$ und $\mathscr{J}$ gesetzt worden. Ich erinnere das, thei
um Anstoß zu vermeiden, theils aber auch, weil die Beyb
haltung derselben Zeichen nirgends so unerläßli
nothwendig und wichtig ist, als bey der combinator
schen Analysis.

95.

a^{n-1} a
a^{n-2} b
a^{n-3} c
a^{n-4} [b^2, d]
a^{n-5} [b c, e]
u. ſ. w. S. 202

Sie ordnet die Gli
daß die Complexione
b, c, d... die gleich
vor ſich haben, in ei
zontale Reihe fallen.
den Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$
gehen die Complexion
ben den Wiederholungen von a, in ſteigender
me 1, 2, 3, 4, 5... fort; mit den Wiederholunge
verbunden, geben ſie durchaus die Summe n
b, c, d... der Darſtellung (S. 202) ſind hier mit
verwechſelt. Für n = 5 wären hier ſchon alle C
xionen für $^5\mathfrak{J}$ vorhanden.

Einzelne Claſſen durch Summen von Cla

(*Nov. Syſt. p.* LV, 9).

96. ${}^{\nu+n}\mathfrak{N} = a^{n-1}\,{}^{\nu}A + a^{n-2}\,{}^{\nu}B + a^{n-3}\,{}^{\nu}C \ldots + a^{n}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ a & b & c & d & \ldots \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & e & d & e & \ldots \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 2 3 .. \\ a b c .. \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... \\ b & c & d & e & ... \end{pmatrix}$

vollkommen so, wie S. 190.

Eben so fånde man den Werth für ^{15}E, wie S. 191.

Involutorische Classen-Darstellung der vorigen Formel.

97.

$a^{n-1} a$	$a^{n-1} a$
$a^{n-2} b$	$a^{n-2}\, {}^{1}A$
$a^{n-3} c$	$a^{n-3}\, {}^{2}A$
$a^{n-4} [d, b^2]$	$a^{n-4} [{}^{3}A, {}^{2}B]$
$a^{n-5} [e, bc]$	$a^{n-5} [{}^{4}A, {}^{3}B]$
u. s. w. S. 204;	u. s. w. S. 208, β

Der Zeiger für die Classen ${}^{1}A, {}^{2}A \ldots {}^{2}B, {}^{3}B \ldots$ u. s. w. i $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... \\ b & c & d & ... \end{pmatrix}$. Auch hier sind die b, c, d... (i 58 und 74, β) mit a, b, c... verwechselt worden. Di inzelnen Classen liegen in den Diagonalen niederwärt

Die Summe in (98) giebt

$$100.\ \begin{bmatrix} {}'A \\ +{}'B \\ +{}'C \\ +\text{etc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1A+{}^2A+{}^3A\ldots \\ +{}^2B+{}^3B+{}^4B\ldots \\ +{}^3C+{}^4C+{}^5C\ldots \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1A \\ +({}^2A+{}^2B) \\ +({}^3A+{}^3B+ \\ \ldots \end{bmatrix}$$

Die Summe in (99) giebt

$$101.\ \begin{bmatrix} {}'\mathrm{A} \\ +{}'\mathrm{B} \\ +{}'\mathrm{C} \\ +\text{etc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\mathrm{A}+{}^2\mathrm{A}+{}^3\mathrm{A}\ldots \\ +{}^2\mathrm{B}+{}^3\mathrm{B}+{}^4\mathrm{B}\ldots \\ +{}^3\mathrm{C}+{}^4\mathrm{C}+{}^5\mathrm{C}\ldots \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1\mathrm{A} \\ +({}^2\mathrm{A}+{}^2\mathrm{B}) \\ +({}^3\mathrm{A}+{}^3\mathrm{B}+{}^3\mathrm{C} \\ \ldots \end{bmatrix}$$

Eben so ist, bey **mehrern** Reihen p, q, r, s... (2

$$102.\ {}'\overset{p}{A} = {}^1\overset{p}{A} + {}^2\overset{p}{A} + {}^3\overset{p}{A} + {}^4\overset{p}{A} + \&$$

$${}'\overset{qp}{B} = {}^2\overset{qp}{B} + {}^3\overset{qp}{B} + {}^4\overset{qp}{B} + \&c$$

$${}'\overset{rqp}{C} = {}^3\overset{rqp}{C} + {}^4\overset{rqp}{C} + \&c$$

$$\ldots$$

nationen, mit allen Versetzungen der Elemente in den ein-
zelnen Complexionen. Wo also diese Versetzungen (wi
bey den Factoren der Produkte) nichts verschiedenes geben
darf man sie nur überhaupt zählen, und ihre Zahl den zu
gehörigen Combinationscomplexionen, welche die übrigen
repräsentiren, beyfügen. Das geschiehet durch di
Versetzungszahlen a, b, c... (*Nov. Syst. Perm*
p. IX, 24 und XL, 10) deren Werth für jede Complexion
gegeben ist (Ebendas. p. XXIV, 23 und hier S. 65 und
102; 1, 2).

Combinationen mit und ohne Summenexponenten.

105. $\mathfrak{a}'A = \mathfrak{a}^1A + \mathfrak{a}^2A + \mathfrak{a}^3A + \mathfrak{a}^4A \ldots$

$\mathfrak{b}'B = \mathfrak{b}^2B + \mathfrak{b}^3B + \mathfrak{b}^4B \ldots$

$\mathfrak{c}'C = \mathfrak{c}^3C + \mathfrak{c}^4C \ldots$

$\mathfrak{d}'D = \mathfrak{d}^4D \ldots$

. . . .

Die Summe aus (105) giebt

106. $\mathfrak{a}'A + \mathfrak{b}'B + \mathfrak{c}'C + \&c = \mathfrak{a}^1A + (\mathfrak{a}^2A + \mathfrak{b}^2B)$

$+ (\mathfrak{a}^3A + \mathfrak{b}^3B + \mathfrak{c}^3C) + \&c$

andern Fällen darf man nur die Buchstaben a. r. (
ßis repetitionibus) oder o. r. (omißis repetitionibus
fügen, und z. B. schreiben:

Var (a b c d . . .) ſimpl. *a. r.*

Comb (a b c d . . .) ſimpl. *o. r.*

II. Die unmittelbarste Anwendung der Combin
lehre zeigt sich bey dem allgemeinen Produkte
Potenzenprobleme der Reihen.

109. Die Combinationslehre deutet überha
in bestimmter Ordnung gegebenen Dinge oder E
durch die Folge der Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . oder der
staben a, b, c, d . . . an. Bey der Verbindung die
mente zu einem zusammengesetzten Ganzen, abstra
von aller Bedeutung (2) und betrachtet z. B. di
plexionen ab und ba als bloße Nebeneinand
lungen der beiden Dinge a, b, noch mit dem Unter
daß in ab das Element a die erste und b die z
Stelle einnimmt, welches bey ba umgekehrt sich ve

faſt ganz überſehen worden iſt — der Analyſis.

111. Läßt man die Buchſtaben a, b, c... allgemei ausgedrückte Größen oder Zahlen bedeuten, ſo da nur noch angegeben werden, wie man ihre Verbi dungen ab, abc u. d. gl. zu nehmen habe. An ſich nehm lich kann ab, in arithmetiſcher Bedeutung, eben ſowo

$a+b$ als $a-b$ und $a.b$ und $a:b$ und a^b und $\sqrt[a]{b}$ u. ſ. w

ausdrücken. Schränkt man aber — ſo lange nichts an ders erinnert wird — die Bedeutung der (für ſich ode in Beziehung auf Zahlen im Zeiger) gegebenen El mente a b c d... auf $a+b+c+d+$ &c, und ih Verbindungen ab, abc, a^2b... auf a. b, a. b. c, a. a. (d. i. a^2b)... ein, ſo entſtehen dadurch Producte aus ein zelnen Factoren, die Wiederholungsexponenten (53 verwandeln ſich in Potenzexponenten, und die i Vorhergehenden aufgeführten blos combinatoriſchen Fo meln und Relationen zuſammengehöriger Dinge oder El mente überhaupt, erhalten dadurch ſogleich beſtimmt arithmetiſche oder algebraiſche Bedeutung.

112. Für die Anwendung dieser und anderer combinatorischen Formeln und Relationen auf die Analysis, ist also nur noch übrig nachzuweisen, bey was für analytischen Problemen sie vorkommen; überhaupt — wo und wie sie zu gebrauchen und im Calcul einzuführen sind. Das nenne ich, statt der algebraischen und transcendentischen (oft sehr verwickelten und schweren) Operationen, die gleichgültigen (einfachern und leichtern) combinatorischen setzen und benutzen. Das hierbey von mir eingeführte Verfahren ist, sowohl in Absicht auf Entwickelung als Darstellung, von dem gewöhnlichen wesentlich unterschieden; daher auch die Einführung jener Operationen statt dieser, in der Erklärung namentlich vorkommt, die ich ohnlängst von der combinatorischen Analysis gegeben habe (Arch. der Math. H. IV. S. 423).

113. Meine Combinationszeichen sind übrigens so geformt, ihre Zusammensetzung so eingerichtet, daß sie das, wofür sie gebraucht werden, nicht nur aufs deutlichste anzeigen, sondern auch alle andere nicht-combinatorische Veränderungen sich bey ihnen anbringen und durch sie nachweisen lassen. Sie können daher auch andern, von ihnen ganz verschiedenen, Methoden leichter angepaßt werden, als man dem ersten Ansehen nach vermuthen sollte. Daß man dabey etwas Neues lernen müsse, was man bisher noch nicht gewußt und in Ausübung gebracht hat, ist freylich eine nothwendige Bedingung, die man sich aber gern wird gefallen lassen, wenn man einestheils sieht, wie leicht dieser combinatorische Calcul ist, anderntheils, welche Schwierigkeiten anderer Methoden hierbey umgangen werden. Nach einer von Herrn Hofrath Kästner, bey ganz anderer Gelegenheit*)

*) Bey einigen von Herrn Professor Buck bekannt gemachten neuen Auflösungen einiger schweren trigonometrischen Aufgaben (Kästn. Eb. Trigon. Satz 15).

114. Wie ich mich bey dieser Anwendung der Comb nationslehre, insbesondere bey dem allgemeinen Potenze und Produkten-Probleme, von denen vornehmlich hi die Rede ist, anfänglich verhalten habe, erhellet aus *Infi Dign.* (§. XXI—XXIII, XXV und XXVII). Bekann lich geräth man nicht gleich zuerst auf den kürzesten natü lichsten Weg; und so hat freylich die Sache nachher e ganz anderes Ansehen gewonnen. Alles ist nachher (wie i bereits im Arch. der Math. H. I. S. 14 in der Note eri nert habe) aufs möglichste simplificirt, alles auf rei combinatorische Begriffe gegründet, und sowohl die Hülf als anderen daraus abgeleiteten Sätze in den strengst systematischen Zusammenhang gebracht worden. Ein Be spiel davon mag die, auf dem Titel der Schrift angeg bene, neue Bearbeitung der obengenannten allgem nen Produkten- und Potenzen-Probleme darstellen. Bei Aufgaben werden, wie man finden wird, aus dem co binatorischen Boden in den analytischen gleichsam nur v pflanzt, und lassen sich aus dem Gebiete der einen W senschaft unmittelbar in das der andern herüber bring

$$srqp = {}^{srqp}\!'D \qquad ...tsrqp = {}^{...tsrqp}\!'\mathcal{M}$$

(der Zeiger ist hier wie in 115)

Die Entwickelung dieser Classen, nach (25, α) g
Produkt nach dem andern, jedes folgende aus dem
vorhergehenden; die Anordnung nach (25, β) gieb
verlangte Produkt für sich, und man hat, wegen d
volution, nicht nöthig, die vorhergehenden für d
genden erst besonders abzusetzen (22).

117. Beweis. Man findet das Produkt qp
man die einzelnen Glieder der Reihe q den einzelne
dern von p nach und nach vorschreibt, und die so
henden Produkte zusammen addirt. Daraus finde
weiter rqp, wenn man mit den einzelnen Gliedern
und qp eben so verfährt, wie vorher mit den Gliede
q und p u. s. w. Das ist: Wenn man die einzelnen
der Reihen p, q, r, s... als Factoren betrachtet,
Produkte aus ihnen auf eben die Art classen
sucht, wie in (25, α, β) die Variationen der geg
Elemente der einzelnen Reihen.

$$(qp)\daleth(n+1) = {}^{n+2}\overset{qp}{B}z^n;\quad (rqp)\daleth(n+1) = {}^{n+3}\overset{rqp}{C}z^n$$

$$(srqp)\daleth(n+1) = {}^{n+4}\overset{srqp}{D}z^n;\ (\ldots tsrqp)\daleth(n+1) = {}^{n+m}\overset{\ldots tsrqp}{\mathfrak{M}}z^n$$

(der Zeiger ist hier, wie in 118)

hier giebt (39) eine Classe nach der andern, und (49) jede für sich außer der Ordnung; nur muß man bey (49) in die letzte Verticalreihe die Buchstaben aus p (wie auch hier schon stehen), in die vorletzte die Buchstaben aus q, in die darauf folgende die Buchstaben aus r u. s. w. das ist, eben dieselben Buchstaben dem Namen nach, als in (49) bereits stehen, nur aus andern Alphabeten setzen (24). So wie in (49) ^{10}D gefunden worden, so kann man auch jede andere Classe sogleich finden.

120. Beweis. Daß für die (n+1)ten Glieder der Produkte aus zwey, drey, vier...m Reihen immer z^n kommen müsse, ist für sich klar. Nun fangen die Verbindungen der Coefficienten, bey zwey Reihen qp von $^2\overset{qp}{B}$, bey drey Reihen rqp von $^3\overset{rqp}{C}$, bey vier Reihen srqp von $^4\overset{srqp}{D}$ an, und gehen bey ihnen die Summenexponenten nach

$$\ldots tsrqp = {}^{m}\mathfrak{M}\,\dagger^{m+1}\mathfrak{M}z\dagger^{m+2}\mathfrak{M}z^2\dagger^{m+3}\mathfrak{M}$$

122. Die Entwickelung von Produkten der solcher combinatorischen Formeln (116, 119, 1 leicht. Die einzelnen Glieder derselben weit fo findet man in meiner Tafel (*Nov. Syst. Perm.* p seq.). Ich habe hier für die Reihen (118) die ein in Absicht auf die Exponenten gewählt, weil das andern Exponenten hinreichend ist (133, 134). Im eben angeführten Tafel sind für die Exponenten den Reihen die allgemeinen Progressionen $\mu, \mu \dagger \delta, \mu$ $\nu, \nu \dagger \delta, \nu \dagger 2\delta \ldots$ u. s. w. gesetzt worden. Die Ursache (S

123. **Aufgabe.** Es ist die Reihe

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \&c = p$$

und die ganze positive Zahl m gegeben: man das allgemeine (n+1)te Glied der Potenz p^m, vorhergehenden Gliedern unabhängig.

lied ihres Produkts, das ist

$$(\ldots tsrqp)\,]\,(n+1) = {}^{n+m}\mathfrak{M}z^n \qquad (119)$$

a aber hier p = q = r = s = t = &c, so kommen in rem Produkte unter den Complexionen (Binionen, Ternonen, Quaternionen ... mtionen) der Coefficienten der gebenen Reihe, mehrere vor, die, der Zahl und Art nach, en dieselben, nur verschiedentlich versetzte Buchstaben thalten, folglich (als Produkte derselben Factoren, nur verschiedener Ordnung und Lage) nicht verschieden sind. iese dürfen also nur überhaupt gezählt und ihre Zahl die Versetzungszahl) den zugehörigen Combinaonscomplexionen, welche die übrigen repräsentiren, ach der Erinnerung (104) beygefügt werden, dadurch rwandelt sich das obige ${}^{m+n}\mathfrak{M}$ in $m\,{}^{m+n}\mathfrak{M}$ (wo die Versetzungszahl oder der Polynomialcoefficient der nzelnen Complexionen der Combinationsclasse $\mathfrak{M}$ ist) und kommt

$$p^m\,]\,(n+1) = m\,{}^{m+1}\mathfrak{M}z^n$$

it dem Zeiger, wie in (124).

(a b c d . . .)

127. Ich habe von den Combinationen in (
(125, 126) nur die Classeninvolutionen ausgehob
die Versetzungszahlen a, b, c... m zu den einzelner
gesetzt. In (41) werden die Classen, eine aus
dern, hergeleitet. Wie jede Classe unabhängig (
vornehmlich verlangt wird) gefunden werden könn
(49) an dem Beyspiele von ^{10}D ganz allgemein.

128. Aufgabe. Die Reihe (123)

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \&c$$

auf die Potenz des Exponenten m zu erheben, di
mag eine ganze oder gebrochene, positive oder
Zahl seyn.

129. Auflösung. Das erste Glied vo
a^m, und das (n+1)te oder

edes m,

$$m = a^m + {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} Z^1 + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2} Z^2 + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3} Z^3 \ldots$$

Die Potenzen $Z^1, Z^2, Z^3 \ldots$ giebt (126); darnach ist

$$Z^1 = a^1 A z^1 + a^2 A z^2 + a^3 A z^3 \ldots + a^n A z^n \ldots$$

$$Z^2 = \qquad b^2 B z^2 + b^3 B z^3 \ldots + b^n B z^n \ldots$$

$$Z^3 = \qquad\qquad c^3 C z^3 \ldots + c^n C z^n \ldots$$

. . .

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & c & d & e & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right)$$

Man bekommt nehmlich hier gleich in die ersten Glieder er Potenzen von Z die Potenzen $z^1, z^2, z^3 \ldots$ weil hier $Z =$ $z + cz^2 \ldots$ gleich im ersten Gliede z hat, welches sich bey $= a + bz \ldots$ in (126) anders verhält). Nimmt man un alle Glieder, in denen z^n vorkommt, mit den zugehö- gen Binomialcoefficienten und Potenzen von a (nach dem bigen, vermittelst der Binomialformel, ausgedruckten Wer- e für p^m) zusammen; denn diese machen mit einander as gesuchte $(n+1)$te Glied aus, a^m als das erste ge- ählt: so erhält man die Formel, wie sie in (129) steht.

nich angegeben. Die vorigen A, B, C... sind ... nomialcoefficienten ${}^{m}\mathfrak{A}$, ${}^{m}\mathfrak{B}$ ${}^{m}\mathfrak{C}$...

132. **Aufgabe.** Die Reihe

$$a + b + c + d + e + f + \&c = p$$

auf die Potenz des Exponenten m zu erheben.

133. **Auflösung.**

1) wenn m eine ganze positive Zahl.

Dann ist $p^m \urcorner (n+1) = \mathfrak{m}\ {}^{m+n}\mathcal{M}$

$$\text{also } p^m = \mathfrak{m}\ {}^{m}\mathcal{M} + \mathfrak{m}\ {}^{m+1}\mathcal{M} + \mathfrak{m}\ {}^{m+2}\mathcal{M} \ldots = \mathfrak{m}\ \mathcal{M}$$

$$\text{und } p^1 = a^1A + a^2A + a^3A + a^4A \ldots$$

$$p^2 = b^2B + b^3B + b^4B + b^5B \ldots$$

$$p^3 = c^3C + c^4C + c^5C + c^6C \ldots$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & . & . & . \\ a & b & c & d & e & . & . & . \end{pmatrix}$$

nter einander kommen, nach (105) summirt, und dur
$a'A$, $b'B$, $c'C$ .... $n'\mathcal{N}$ ausdrückt.

135. Die obigen beiden Ausdrücke für $p^m ⁊ (n+$
und der für p^m (133, 2) kommen auch (S. 67, 68) vo
und werden daselbst erklärt. Eine ausführliche Darste
ung der ersten sieben Glieder von p^m (Ebendas. S. 67
Die dortigen 𝔄, 𝔅, ℭ... sind meine Binomialcoefficiente
^{m}𝔄, ^{m}𝔅, ^{m}ℭ...

136. Hier (134) ist die Potenz m der Reihe a + b +
+ d + &c aus jener der Reihe $a + bz + cz^2 + dz^3 +$ &
bgeleitet worden. Man hätte jene, eben so wie dies
ganz independent behandeln können; ich habe aber de
ingeschlagenen Weg, der Kürze wegen, vorgezogen, hal
uch bey den Potenzen, wie bey den Produkten (122) d
m einfachsten ausgedrückte Reihe $a + bz + cz^2$ ... zu
Grunde gelegt. Meine Formeln für Potenzen (*Nov. Sys*
Perm. p. LIV, 7, 8) beziehen sich auf die am allgemei
ten ausgedrückte Reihe $az^{\mu} + bz^{\mu+\delta} + cz^{\mu+2\delta}$ ... (S. 24, 0

137. Es ist nützlich, die Vergleichung der Lokalze
hen für Potenzen mit den combinatorischen, etwas nähe

139. Eben so folgt aus (137 und 129) fü[r]
Werth von m

$p^m \varkappa 1 = a^m$

$p^m \varkappa 2 = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^1 A$

$p^m \varkappa 3 = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^2 A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^2 B$

$p^m \varkappa 4 = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^3 A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^3 B + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}$

= = = = = =

$p^m \varkappa (n+1) =$ (dem Coefficienten von z^n in 12[9]

$$p\begin{pmatrix} = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ & a & b & c & d & e & f & \ldots \end{pmatrix}$$

Die in (138 und 139) unter den Formeln beyg[e]
Nachweisungen zeigen 1) die Coefficienten a, b, c.
Reihe p, und 2) was für Zahlenwerthe denselben
Classencomplexionen zukommen.

140. Solche Vergleichungen der beiderley
und combinatorischen) Zeichen und Formeln sind
weil jene, als Stellvertreter der letztern, wegen ihr[er]

ficanten Kürze, während des Calculs und selbst in den Formeln für die Endresultate (S. 13 Note k) häufig gebraucht werden (4. S. 157). Sie knüpfen gleichsam das Band zwischen der gewöhnlichen und der combinatorischen Analysis, und man kann, wenn die Relation zwischen beiden gegeben ist, sogleich aus den Lokalausdrücken in die combinatorischen, und aus diesen in die der gewöhnlichen algebraischen Sprache übergehen. Von solchen Relationen für Potenzen, wie hier (*Nov. Syst. Perm.* p. LI, und die dortigen Exempel p. LI und LII) für Produkte (Ebendas. p. LII, LIII).

141. Nun sey auch m in (139) eine ganze positive Zahl: so geben, die beiden Werthe von $p^m \varkappa (n+1)$ in (138, 139 oder 129) einander gleich gesetzt, folgende Relation:

$$\mathfrak{m}^{n+m}\mathcal{M} = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^n A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^n B + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, \mathfrak{c}^n C + \&c$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ a & b & c & d & \cdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ b & c & d & e & f & \cdots \end{pmatrix}$$

Die Glieder rechter Hand brechen mit demjenigen ab, wo zuerst die Zahl des Binomialcoefficienten so groß wie m, oder die der Classe so groß wie n ist. Diese Formel giebt einzelne höhere Classen der Potenzen durch Summen von niedrigern Classen. Auf ähnliche Art habe ich sie bereits (*Nov. Syst. Perm. p.* LV, 9) hergeleitet. Man vergleiche hier (96).

142. Die Buchstaben m, $\mathfrak{m}$, $\mathcal{M}$ bestimmen einander dergestalt, daß ein Werth des einen die ähnlichen Werthe der beiden andern festsetzt. Hier mögen Zahlenwerthe für m angenommen, die Werthe der $\mathfrak{m}$ und $\mathcal{M}$ bestimmen.

$e^{15}E = {}^5\mathfrak{A}a^4a^{10}A + {}^5\mathfrak{B}a^3b^{10}B + {}^5\mathfrak{C}a^2c^{10}C + {}^5\mathfrak{D}a^1d^{10}D + {}^5\mathfrak{C}a^0$

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \dots \\ a\ b\ c \dots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ b & c & d & e & f & \dots \end{pmatrix}$$

Man vergleiche (54. S. 191) und das Exempel (*Syst*. p. LVI, 11).

143. Lehrsatz. Aus der Reihen p, q, r, s . . . (

Potenzen, nach der Ordnung,

$$p^a = p^a \varkappa 1 + p^a \varkappa 2 z^1 + p^a \varkappa 3 z^2 + p^a \varkappa 4 z^3$$
$$q^b = q^b \varkappa 1 + q^b \varkappa 2 z^1 + q^b \varkappa 3 z^2 + q^b \varkappa 4 z^3$$
$$r^c = r^c \varkappa 1 + r^c \varkappa 2 z^1 + r^c \varkappa 3 z^2 + r^c \varkappa 4 z^3$$
$$s^d = s^d \varkappa 1 + s^d \varkappa 2 z^1 + s^d \varkappa 3 z^2 + s^d \varkappa 4 z^3$$
. . . . .

folgt das allgemeine (n + 1)te Glied,

I. Für das Produkt aus zwey Potenzen

$$(q^b p^a) \urcorner (n+1) = {}^{n+2}\overset{q^b p^a}{B} z^n$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ p^a \varkappa 1 & p^a \varkappa 2 & p^a \varkappa 3 & p^a \varkappa 4 \ldots \\ q^b \varkappa 1 & q^b \varkappa 2 & q^b \varkappa 3 & q^b \varkappa 4 \ldots \\ r^c \varkappa 1 & r^c \varkappa 2 & r^c \varkappa 3 & r^c \varkappa 4 \ldots \end{matrix}\right]$$

wenn man in dem allgemeinen Gliede, 0, 1, 2, 3 ... n
und nach für n setzt.

III. Für das Produkt aus m Potenzen

$$(\ldots s^d\, r^c\, q^b\, p^a)\urcorner(n+1) = {}^{n+m}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{\mathfrak{M}} z^n$$

$$\text{also } \ldots s^d r^c q^b p^a = {}^{m}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{\mathfrak{M}} + {}^{m+1}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{\mathfrak{M}} z + {}^{m+2}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{\mathfrak{M}} z^2 +$$

(Der Zeiger enthält die Coefficienten nach der Ord- nung, aller m Potenzreihen, wie sie in (143) stehen.)

Auch hier kommt der Ausdruck für die einzelnen Glie
aus dem allgemeinen, wenn man 0, 1, 2, 3 ... nach u
nach für n setzt.

144. Beweis. So vielfach und zusammengese
der Lehrsatz (143) auch an sich ist, so leicht ist glei
wohl der combinatorische Beweis desselben hier an die
Stelle.

fügten Zeiger anlangend, so darf man darinn p
$p^a \varkappa 2 \ldots q^b \varkappa 1$, $q^b \varkappa 2 \ldots$ u. s. w. als bekannt vo
setzen, weil die Reihen p, q, r, s... gegeben sind, und
meinen (lokal- und combinatorischen) Potenzformel
$p^a \varkappa (n+1)$, $q^b \varkappa (n+1)$ u. s. w. durch $p \varkappa (n-$
$q \varkappa (n+1)$ u. s. w. sich ausdrücken lassen. Die Com
tion der Variationsclassen vermittelst der beygefügte
ger, hängt von Tab. IV (Nov. Syst. p. LX) ab,
fern man sich die Complexionen (nach 18, 25) nicht
machen will.

Von dieser und ähnlichen Voraussetzungen sehe
(150, 15). Auf ihnen beruhen die so nützlichen Red
nen der Probleme auf einander, der zusammenges
auf die einfachern, davon Herr Prof. Pfaff in
beiden Abhandlungen (IV, V) eine Menge interes
Beyspiele gegeben hat, die, ohne den Gebrauch der
ausdrücke zum Theil auf außerordentliche Verwickel
geführt haben würden (Vergl. S. 126. Anm.; S. 157,

145. Die Ausdrücke (143, I-III) für g
Glieder $\mathfrak{I}$ (n+1) verwandeln sich sogleich in solc

$(r^c q^b p^a) \varkappa (2+1) = {}^3C$

das giebt, nach dem Zeiger (143, II) die Complexion[en]
selbst gemacht, oder nach Tab. IV (Nov. Syst. Perm. [p.]
LX) und den dort überschriebenen Reihenexponenten r, q,
angeordnet:

$r^c \varkappa 1$	$q^b \varkappa 1$	$p^a \varkappa 3$	$r^c \varkappa 2$	$q^b \varkappa 1$	$p^a \varkappa 2$
$r^c \varkappa 1$	$q^b \varkappa 2$	$p^a \varkappa 2$	$r^c \varkappa 2$	$q^b \varkappa 2$	$p^a \varkappa 1$
$r^c \varkappa 1$	$q^b \varkappa 3$	$p^a \varkappa 1$	$r^c \varkappa 1$	$q^b \varkappa 3$	$p^a \varkappa 1$

wo man $r^c \varkappa 1$ und $r^c \varkappa 2$ als factores communes in di[e]
zugehörigen Nebenfactoren nehmen, oder jede andere, au[s]
den übrigen dazu wählen kann; diejenigen nehmlich, di[e]
am meisten zusammengesetzt sind. Ein anderes Beyspie[l]
für den nächstfolgenden Coefficienten $(r^c q^b p^a) \varkappa 4$
steht im Archiv der Math. (H. II. S. 227). Der hiesig[e]
Lehrsatz (143) mit seinem Beweise (144) ist nehmlic[h]
bereits dort, etwas ausführlicher, zugleich mit der An[-]
wendung auf gebrochene Functionen, vorgetragen wor[-]
den.

III. Vergleichung des von Herrn Etatsrath Tetens bey den allgemeinen Produkten- und Potenzen-Problemen angebrachten Substitutionsverfahrens (hier, Abh. I. S. 1—47) mit der Hindenburgischen Combinationsmethode.

147. Herr Etatsrath Tetens scheint, wegen der Combinationsmethode und ihrer Anwendung auf die beiden eben genannten Probleme, sich ganz an meine erste, von ihm allein (S. 1) angeführte Schrift (*Infin. Dign.* 1779) gehalten zu haben. Ich kann zwar voraussetzen, daß ihm die, zwey Jahre später (1781) von mir herausgegebenen, in Absicht auf combinatorische Zeichen und Sätze schon viel vollkommnern (Arch. der Math. H. II. S. 251, 252) Novi Syst. Perm. et Comb. — primae Lineae nicht unbekannt geblieben sind; da aber die erste Schrift ihm über die combinatorische Behandlung beider Sätze (an deren allgemeiner, aber auch zugleich so viel immer möglich leichter und für die Anwendung brauchbarer Auflösung, ihm viel gelegen seyn mußte *)) vollkommen Auskunft gegeben hatte: so fragt sich's, ob ihm bey seinen vielen Geschäften von ganz anderer Art, Zeit und Lust genug übrig geblieben sey, die Vorzüge dieser zweyten Schrift, in Begründung der neuen Methode mit ihren Operationen und der darinn gegebenen weitern Aussichten, in reifliche

*) Vornehmlich, was die Bestimmung der Coefficienten der Potenzen des Polynomiums anbetrifft. Herr Tetens hat bey der häufigen Anwendung von Wahrscheinlichkeitsberechnung auf mehrere Gegenstände, viel Veranlassung gehabt, über das Polynomium zu arbeiten, und ist von Zeit zu Zeit auf diese wichtige analytische Untersuchung, wie er sie nennt, zurückgekommen (dess. Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften; 2 Th. S. 110-141; Leipz. Magaz. der Math. 1787. St. I S. 55—62; auch hier, S. 46, 47). Die im ersten Aufsatze hier mitgetheilte Auflösung hat unverkennbare Vorzüge. Herr Tetens hält sie für vollendet; auch ist selbige unter allen nicht-combinatorischen die leichteste für die Ausübung.

hematik, und die neueste combinatorisch = analytisch
Schrift des Herrn von Prasse) vor der Ausarbeitun
seiner Abhandlung über die formulam polymonialem, nic
haben bekannt werden können.

148. Die Combinationsmethode betreffend, wir
(S. 1—4) erkläret: Sie sey auf ziemlich einfache Grund
sätze und Operationen gebracht; ihre Brauchbarkeit be
dem Polynomialpotenzenprobleme sowohl (dessen Gliede
sie ganz allgemein außer ihrer Folge zu finden lehre) al
bey verschiedenen andern analytischen Problemen, se
auch bereits anerkannt; man könnte daher das Combi
niren eben sowohl unter die analytischen Methoden au

*) Zum Beweise will ich hier nur die Unbekanntschaft mit me nen beiden (lokal = und combinatorischen) Formeln (*Nov. Syst. Perm. p.* LI, Ex. I und p. LV, 9, 10) anführen, von denen di erste zwar (*Infin. Dign. p.* 71, 3) aber da nicht so vollkomme (wie dort) gezeichnet, die andere aber gar nicht da selbst vorkommt. Hätte Herr Etatsrath Tetens mein *Nov. Syst.* eben so aufmerksam, als meine *Infin. Dign.* durchgelese und geprüft, so würde ihm seine Grundformel (Seite 13 Satz 4) eben so wenig, als die Anwendung derselben durc Substitution, neu vorgekommen seyn. Man vergleich meine dortige Note k S. 12—14; und hier (S. 248, 249).

thode bey diesem Probleme ganz entbehrlich. Dies
sie auch bey andern analytischen Problemen, wo
seine Zuflucht zu ihr genommen hat.

149. Was ich hierauf zu antworten habe, be
zunächst eine kurze Entschuldigung, die Herrn Tete
wegen der so eben (148) angeführten Aeußerung, bill
weise zu statten kommt. Dieser soll eine etwas aus
lichere Rechtfertigung meiner Combinationsmethode,
wohl an sich als besonders in Vergleichung mit dem
geschlagenen neuen Substitutionsverfahren, folgen.

150. Die später herausgegebenen, und eben de
gen die Methode vollkommner darstellenden, combin
risch-analytischen Schriften, gründen sich sämtlich
die im *Nov. Syst. Perm.* festgesetzten Begriffe, Zei
Operationen, Sätze und Formeln, wodurch manche
den *Infin. Dign.* näher bestimmt, modificirt, erwei
abgeändert wird. Da nun aus der Note zu (147)
deutlich, und durch das in der Folge weiter beyzub
gende noch augenscheinlicher, erhellet, Herr T. habe

mit diesem *Nov. Syst.* nicht so bekannt gemacht, als mit jenen Infinit. Dignitatibus; Manches, die Combinationsmethode wesentlich Betreffendes, vielleicht gar nicht, vielleicht nicht in seinem wahren und ganzen Umfange kennen gelernt, dahin vorzüglich die combinatorischen Involutionen zu rechnen sind, davon zwar Beyspiele in jener ersten Schrift bereits vorkommen, diese wichtige Sache aber, in ihrem ganzen Umfange, im ersten Bande des Archivs der reinen und angewandten Mathematik und zum Theil auch hier, allererst entwickelt und vollendet worden ist — so wird man sich wohl keiner Uebereilung schuldig machen, wenn man annimmt, es sey, unter diesen Umständen, noch nicht Zeit gewesen, über den Werth oder Unwerth der combinatorisch-analytischen Methode öffentlich abzusprechen, die Akten seyen, für ein vollgültiges Urtheil darüber, wie es für den gegenwärtigen Zustand *) der Wissenschaft passend wäre, nicht vollständig instruirt gewesen. Hierbey kommt Herrn Etatsrathe Tetens allerdings noch zu statten, daß er ohne Zweifel in den Gedanken gestanden hat, und durch die Sache selbst gewissermaßen ist veranlaßt worden, so zu denken „meine „erste Schrift (*Infin. Dign.*) die sich, selbst dem Titel „nach, recht eigentlich, fast ganz ausschließlich, und über„dies noch so umständlich und ausführlich, über die bei-

*) Von der allmähligen Verbesserung der combinatorischen Methode zeigen die späterhin von mir herausgegebenen Abhandlungen; dahin unter andern meine *Paralipomena — ad Ser. Reverf.* (1793) zu rechnen sind. Hier will ich mich noch auf die im Frühjahre 1794 geschriebene Note zu meinem ersten Aufsatze über combinatorische Involutionen (Arch. der Math. 1. H. S. 14) berufen, wo ich von der Wichtigkeit spreche, alles aus rein-combinatorischen Begriffen abgeleitet, und in den strengsten systematischen Zusammenhang gebracht zu haben. Vielleicht hat Herr Tetens eben um diese Zeit seine Abhandlung über die *formulam polynomialem* aufgesetzt, wo die Combinationsmethode bereits sehr weit über die anfänglichen ersten Gränzen sich erstreckt und ausgebreitet hatte. Dies nur zur Rechtfertigung der Sache an sich; Herrn T. kann dabey nichts zur Last gelegt werden.

ausführlicher darstellt, und weitere Aussichten ihr ausgebreiteten Anwendung giebt (Toepf. comb. S. 189, 190; auch hier 4 und 5, S. 156 — 160

151. So viel zur Entschuldigung, wegen Tetens Aeußerung über meine Combinationsmetho und nun auch etwas zu Rechtfertigung derselben, das angebliche Surrogat dafür — das vorgesch Substitutionsverfahren.

Ich habe zwar meine Erinnerungen dagegen v dentlich in Anmerkungen bey Herrn Tetens Abhan zu mehrerer Bequemlichkeit der Leser, sogleich an D Stelle, beygebracht; aber die Wichtigkeit der Sache eine etwas detaillirtere Vergleichung beider Verfah Zusammenhange nothwendig zu machen.

152. Herr Tetens erklärt (S. 3) er habe Potenz eines Polynomiums eine in der Ausübung blos analytische Formel gefunden, wobey man di binationsmethode nicht nöthig habe; und so sey d wissermaßen als eine Erweiterung der Ana

anzusehen. Die Ausdrücke, wie sie in dieser Formel zu Bezeichnung der Terminorum generalium vorkommen, sind von der Gattung, die ich Lokalausdrücke zu nennen pflege, und man findet die allgemeine Vergleichung derselben mit meinen Lokalzeichen (in der Note g. S. 7, 8) ausführlich angegeben. Hier hat man also eine verschiedene Bezeichnung derselben Sache. Das ist nichts besonders, und kann nicht wohl anders seyn, wenn Jeder seinen eigenen Weg geht. Aber — was man nicht vermuthen sollte — die (§. 8. Satz 4. S. 13) aufgeführte neue Formel für den allgemeinen Ausdruck des nten Coefficienten der Potenz m des Polynomiums $a + bx + cx^2 \ldots$ ist keine andere, als die vorlängst von mir bekannt gemachte Lokalformel; die Fundamentalformel (wie ich sie Arch. der Math. H. II. S. 250 nenne) für das allgemeine Glied dieses Problems, worinn ich einen Lehrsatz aufgestellt habe, der den ganzen Inhalt dieses Gliedes (oder Coefficientens desselben) jener Potenz, und was darinn von andern Potenzen vorkommt, sehr deutlich und genau angiebt. Die Identität beider Formeln habe ich in der Note k (zu S. 12 — 14) umständlich dargethan.

153. Hier folgt der Aufschluß dieses so auffallenden ganz sonderbaren Phänomens. Die Lokalformel für Potenzen von der hier (152) die Rede ist, kommt zuerst (*Infin. Dignit. p.* 71) in einer sehr unvollkommenen Zeichnung, vor, und die zugehörige, ihr gleichgültige, combinatorische, steht weit von ihr getrennt (S. 133, 2) *). Im Nov. Syst. Perm. verhält sich das

*) Das kann einer Schrift über einen ganz neuen Gegenstand nicht zum Vorwurfe gereichen, bey welcher, selbst während des Abdrucks derselben, neue Ideen an die alten sich anreihten, wo also vieles nicht, wie es sollte, ganz deutlich ausgedrückt, gezeichnet, geordnet, erwiesen, vorkommt; einer Schrift, deren Verfasser die darinn aufgeführte Methode lange Zeit für eine specielle, nur auf das Polynomialproblem sich beschränkende, ansahe,

ganz anders. Da stehen (S. LI, 5) die oben (138) angeführten einfachsten Vergleichungen der lokal- und combinatorischen Zeichen für Potenzen voran; auf diese folgt (Exempel I.) jene allgemeine Lokalformel des unbestimmten (n+1)ten Gliedes der mten Polynomialpotenz und gleich darauf (S. LII) die zugehörige combinatorische Formel für einen bestimmten Werth von n angewendet, und noch oben drein, zu mehrerer Deutlichkeit, in die gewöhnliche algebraische Sprache übersetzt. Eben so stehen (Ebend. S. LIV, 7, 8) die combinatorischen Formeln für ganze positive, und jede andere Exponenten der Potenzen, unmittelbar neben einander, welche in den *Infin. Dign.* ebenfalls getrennt (p. 98, 7, 8 und 113, 2) vorkommen. Nach dem Novo Systemate kann man also die so wichtige Relation der lokal- und combinatorischen Formeln überhaupt (für Potenzen, so wie für Produkte [Ebendas. p. LI — LIV] wovon aber hier an dieser Stelle die Rede nicht ist) gar nicht verfehlen; und folglich auch nicht die, der beiden Hauptformeln für Potenzen (S. 13. Note k)

$$(a+q)^m \varkappa n = {}^m\mathfrak{A}a^{m-1} q^1 \varkappa (n-1) + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2} q^2 \varkappa (n-2) + \&c$$

$$q\,[\,b\ c\ d\ e\ f\ \ldots\,]$$

$$(a+q)^m \varkappa n = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^{n-1} A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^{n-1} B + \&c$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$$

wo jene Lokalformel den I n h a l t, die letztere hingegen die c o m b i n a t o r i s c h e A u s f ü h r u n g desselben, für

und nur erst späterhin, da sie beynahe ganz abgedruckt war, gewahr wurde, es lasse sich von der Combinationsmethode eine ganz allgemeine Anwendung auf die Analysis machen (5); einer Schrift endlich, die zwar als die erste, in welcher die Bahn gebrochen worden, ihren historischen Werth hat, die man aber gar nicht als M u s t e r der Combinationsmethode oder der combinatorisch-analytischen Darstellung empfiehlt (Toepf. comb. Anal. 189, 190).

Complexionen der Combinationsclassen unmittelbar vorg...
nommen wird, ist unstreitig Ursache gewesen, daß Herr
Etatsr. Tetens (der sich, wie gesagt, blos an die *Infi...*
Dign. scheint gehalten zu haben) jene Lokalformel, m...
ihrer Bedeutung, ganz aus den Gedanken gekommen i...
Der Wunsch, die Leichtigkeit der combinatorischen Metho...
bey dem Polynomialprobleme, auf einem andern Weg...
wenn es möglich wäre, zu erreichen, ohne erst ganz ne...
und bis dahin unbekannte Operationen lernen und anwe...
den zu müssen, führte ihn späterhin auf eine, wie s...
(S. 3) genannt wird, blos analytische Form...
(S. 13), (in welche nehmlich analytische Substitution...
von längst bekannter Art zu machen sind) die vollkomm...
aus denselben Elementen, in eben der Ordnung, wie mei...
obige Lokalformel zusammengesetzt, und also, bis auf d...
Zeichnung, ganz die meinige ist.

154. Nicht also die Grundformel, sondern nur d...
Art sie anzuwenden, ist bey beiden Verfahren verschiede...
Ich setze die Elemente nach der obigen zweyten Form...
(153) combinatorisch zusammen; Herr Tetens bedie...
sich gewöhnlicher Substitutionen in die erste. In der Fo...
mel nehmlich (S. 13) ist der erste Theil des gesucht...

der (Nov. Syst. Perm. p. LV, 9, 18 und hier 14
aufgeführten Relation und Zerlegung der höhern
nationsclassen in Summen von niedrigern ab;
Entwickelung der Glieder durch Substitution ist
fortgesetzte mehrmals wiederholte Anwendung d
womit auch (S. 15, Anm. 3) übereinstimmt.

Ich sage hiermit nicht, Herr Etatsrath Tet
seine Substitutionsmethode von dieser Relation a
Keinesweges! Ich bin vielmehr überzeugt, die
dafür (die nur im Novo Syst. nicht aber in den Inf
stehet) sey ihm gänzlich unbekannt geblieben. Di
und ihre Auflösung durch Substitution haben sich t
lich auf einem und demselben Wege bey ihm einge

155. Die Frage, die nun zunächst entsteht,
Substitutionsverfahren oder die Combinations
bey Auflösung des Polynomialproblems kürzer u
ter, also vorzüglicher, sey, kann nicht besser, a
unmittelbare Nebeneinanderstellung entschieden
Hier ist also der Ort, die (S. 19. Note m) ver
Vergleichung beider aufzustellen.

mel T ($a + + |n|)^4$ (S. 19 — 21) gegeben
wird.

ie dort nachzulesende, nach den vorhergehenden Vorschriften handelte Auflösung, beruht auf folgenden drey Punkten:

1) Des allgemeinen Coefficientens (S. 13) erster heil $m a^{m-1} |n|$ (hier $4 a^3 . 0$) ist, wie immer, unmittelr und völlig entwickelt gegeben (S. 14. 9. Anm. 1).

2) Der zweyte Theil $\frac{m . m - 1}{1 . 2} a^{m-2} T (b + + |n-1|)^2$ ier $\frac{4 . 3}{1 . 2} a^2 [b . 0 + \ldots$ S. 20] hat nach (S. 9, 5. Satz 2) ch nicht die geringste Schwierigkeit, und kann sogleich schafft werden.

(Daher auch die Numern 1) 2) (S. 19) unten sogleich entwickelt dargestellt werden.)

3) Die übrigen noch unentwickelten Theile werden en so, nach der Formel durch Substitution, behandelt S. 15. Anm 3). Die beiden ersten Theile aus jeder uen Substitution lassen sich, wie die anfänglichen (1, 2)

sogleich übersehen; und so wird mit Substitutionen fortgefahren, bis alles in solchen ersten Theilen ausgedrückt, und dadurch gegeben ist.

Bey dem Verfahren selbst beobachtet man folgende Ordnung. Zuerst entwirft man die Substitutionen in Formeln (S. 19, 20) um sich, besonders wenn deren eine große Menge ist, nicht dabey zu versehen, weil hier nicht selten Substitutionen in Substitutionen vorkommen (S. 4. 20). Dann nimmt man die Werthe der Theile, die sich übersehen lassen (1, 2; die andern sind nehmlich schon weiter zerlegt) für den gesuchten Coefficienten in eine Summe zusammen (S. 20, 21).

(β) Wie selbiges, in combinatorischen Zeichen ausgedrückt, anschaulich sich darstellen läßt.

Der Ausdruck (141. S. 236)

$$p^m \varkappa (n+1) = m^{n+m} \mathcal{M} = {}^m\mathfrak{A}\, \mathfrak{a}^{m-1}\, \mathfrak{a}^n A + \&c$$

giebt, für $m=4$ und $n=11$, den gesuchten Coefficienten (156) $p^4 \varkappa 12 = \mathfrak{d}^{15}D$, und (Ebend. oder auch (143)

$$\mathfrak{d}^{15}D = {}^4\mathfrak{A}\, \mathfrak{a}^3\, \mathfrak{a}^{11}A + {}^4\mathfrak{B}\, \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^{11}B + {}^4\mathfrak{C}\, \mathfrak{a}^1 \mathfrak{c}^{11}C + {}^4\mathfrak{D}\, \mathfrak{a}^0 \mathfrak{d}^{11}D$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ a & b & c & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt, wenn man nur die beiden ersten Glieder (in denen blos die Classen ${}^{11}A$ und ${}^{11}B$, aber keine höheren vorkommen) beybehält, die übrigen aber (die höhere Classen ${}^{11}C$, ${}^{11}D$ enthalten) durch fortgesetzte Substitutionen immerfort weiter zerlegt, die Zeiger, der Deutlichkeit wegen, beyschreibt, und die Binomialcoefficienten, der Kürze halber, beybehält;

$p^4 \varkappa 12$ oder $\mathfrak{d}^{15}D$

das ist

$$+\,{}^4\mathfrak{D}\,a^0 \left[\begin{array}{l} {}^4\mathfrak{A}\,b^3.\,a^7A + {}^4\mathfrak{B}\,b^2.\,b^7B \\ \quad\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & . & . & 6 & 7 \\ c & d & . & . & h & i \end{array}\right) \\ {}^4\mathfrak{C}\,b^1[{}^3\mathfrak{A}\,c^2.\,a^4A + {}^3\mathfrak{B}\,c^1.\,b^4B + {}^3\mathfrak{C}\,c^0.\,c^4C] \\ \quad\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & e & f & g \end{array}\right) \\ {}^4\mathfrak{D}\,b^0[{}^4\mathfrak{A}\,c^3.\,a^3A + {}^4\mathfrak{B}\,c^2.\,b^3B + {}^4\mathfrak{C}\,c^1.\,c^3C \\ \quad\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{array}\right) \end{array}\right]$$

Hier sind nehmlich die ersten beiden Glieder v… $p^4 \varkappa 12$ oder $\mathfrak{d}^{15}D$, worinn die Classen ${}^{11}A$ und ${}^{11}B$ v… kommen, vorangesetzt; die übrigen Classen ${}^{11}C$ und ^{11}… werden durch Substitutionen weiter zerlegt, die h… in den Klammern, neben ${}^4\mathfrak{C}\,a^1$ und ${}^4\mathfrak{D}\,a^0$ befindlich si… Die Zerlegungsformel bleibt immer dieselbe (141, 142)…

Unter den beiden letztern Substitutionen kommen glei… wohl hier noch zwey höhere Classen ${}^4C$ und ${}^3C$ vor, w… sich nehmlich ihre Werthe d^2e und d^3, sogleich an dies… Orte, übersehen lassen.

Ich darf hoffen, was hier (in α und β) gesag
den ist, vornehmlich aber die so eben vorgeleg
schauliche Darstellung, werde vieles dazu
gen, Herrn Tetens Substitutionsmethode in de
zu übersehen.

Das Wesentliche des Verfahrens, auf combi
sche Vorstellungen und Zeichen, wie hier gebracht,
in meiner Sprache ausgedrückt, in Folgendem:

Es werden nehmlich durchgängig die dr
vierten u. s. w. alle folgenden höhern Class
den Versetzungszahlen ihrer einzelnen Complexione
$c^{n}C$, $d^{n}D$, $e^{n}E$ . . . vermittelst der Relationen (*Nov*
Perm. p. LV, 9, 10 oder hier 141, 142) in Class
niedrigern Summen, und diese, von der dr
an, weiter in Classen von niedrigern Summen,
zerlegt, und von diesen nur immer die beiden
Classen beybehalten; und so ferner mit der Zerlegun
Substitution nach Herrn Tetens) fortgefahre
alles durch erste Classen ^{1n}A, ^{1n}B gegeben ist.

eringe Ersparnis.

Die Zerlegungen durch Substitutionen werden nehm-
ch um so zahlreicher, je größer einestheils die Zahl (n)
es gesuchten Coefficientens $p^m \varkappa (n+1)$ und anderntheils
er Exponent (m) der Potenz ist; das letztere aber nur
is dahin, wo $m = n - 1$ (S. 18. Anm. 5; S. 21.
nm. 6).

Ein solches Ersparnis der Zerlegungen und
Substitutionen giebt nun meine Combinations-
ethode, nach welcher die einzelnen Complexionen der
lassen besonders gesucht, und die zugehörigen Versez-
ngszahlen (Polynomialcoefficienten) hinterher bestimmt
erden; beides nach äusserst leichten Regeln und For-
eln. Die Anwendung derselben auf die Aufgabe (156)
, wie folget:

II. Auflösung. Nach der Hindenburgischen Com-
nationsmethode

Auch hier ist, für $n+1=12$, oder $n=11$ und $m=4$

$$p^4 \varkappa 12 = \mathfrak{d}^{15}D \text{ d. i. } (141, 142)$$

6cef	12b
3d²f	4c³
3de²	12c
	4cd

Alles, wie (in I, β) und bey Herrn Tetens (S
21) wenn man auch hier, wie dort, m = l = o setz

Die Darstellung der bloßen Complexionen (
Binomial- und Polynomialcoefficienten) ist hier für
wie (S. 191) für ^{15}E. Die Ordnung des Verfah
nach welchem man den gesuchten Coefficienten besti
ist folgende:

1) Man suche die einzelnen Complexionen der C
^{11}A, ^{11}B, ^{11}C, ^{11}D, nach (42), indem man hier ^{11}A
setzt, und die Classen, mit ihren Ordnungen nach e
der ableitet. Hier ist die Ordnung b die erste (n
42 die Ordnung a) weil der Zeiger hier, nicht mit
dern mit b anfängt.

^mA, ^mB, ^mC, ^mD für die Elemente b, c, d, e . . . u
der Involution (68. S. 204) sogleich abschreiben kö
nen; wenn man dafür n = 11, und nach diesem Wert
die Complexionen der Diagonalfächer rechter Hand nied
wärts, durch m und l und k und i, mit den ihnen zug
hörigen Potenzen von b verbunden, genommen hätte (71

158. Das wäre also die (Note m, S. 19) verspr
chene unmittelbare Vergleichung beider Verfahren gege
einander. Die größere Leichtigkeit in der Entwickelun
die mehrere Kürze in der Darstellung, welche die Comb
nationsmethode hier offenbar zeigt, beruhet auf Folge
dem; woraus die Vorzüge des Combinirens anstatt d
Substituirens noch deutlicher erhellen werden.

1) Werden dabey die successiven Substitutionen v
mieden, die, so leicht sie auch an sich sind, dennoch weg
der Menge in Verwickelung führen, wobey man dann a
merken muß, nichts zu übersehen.

2) Das Combiniren der Elemente für die höhe
Classen ^mC, ^mD, ^mE... welches hier statt des Substituire
gesetzt und gebraucht wird, ist äußerst leicht, und beste

leicht, sie können sogar, wenn man will, aus *Infin.* I
p. 168, 169 (selbst, wenn die Complexion aus zehn
staben bestünde) genommen werden, und mehrere
plexionen haben eine und dieselbe Versetzungszahl.
kann daher, ehe man noch mit dem ersten Entwurf
gen der Substitutionen (S. 251, α), um die Theile de
suchten Coefficienten daraus herzuleiten, fertig ist, b
alle Complexionen, mit allen Versetzungszahlen gef
haben. Und so zeigt sich auch hier die Nützlichkei
Vorschrift, die ungleichartigen Elemente (wie hie
Complexionen und ihre Versetzungszahlen) nicht in
bindung mit einander, sondern ihre Gesetze getrenn
einzeln zu suchen (4. S. 156, 157).

4) Die Combinationsmethode bringt, wie au
Darstellung (S. 255) augenscheinlich zeigt, die Be
theile des gesuchten Coefficientens sogleich gut geor
zusammen, dergestalt, daß jedes Ding, während der
wickelung selbst, die ihm zugehörige Stelle unter den
gen einnimmt. Hier ist also kein Zusammenlesen de
zelnen zerstreuten Theile (wie beym Substitutionsve

N

mehrere Größen und die Menge ihrer Theile, die da
vorkommen; theils durch mehrere zusammengesetzte, ...
diesen Größen vorzunehmende, Operationen ist, desto wi...
samer und thätiger ist die Combinationsmethode. Ich ...
rufe mich hier auf die combinatorische Darstellung ...
sehr zusammengesetzten Lehrsatzes in (143) und sein...
sehr kurzen Beweises in (144). Man wird dadurch, ...
wie durch das hier zunächst aufzuführende Beyspiel, me...
bey Herrn Tetens Satze gemachte Bemerkungen (Note...
und r, S. 35 und 40) vollkommen bestätiget finden. ...
kann gewiß kein anderes Verfahren die so große Manni...
faltigkeit der vorkommenden einfachen und zusammen...
setzten Größen, wie und mit welcher Auswahl, mit e...
ander verbunden, sie das Gesuchte bestimmen, verständ...
cher und faßlicher zusammenordnen, als das combina...
rische! Zu den häufigen, bey andern Gelegenheiten berei...
vorgelegten Beyspielen dieser Art, will ich noch das f...
gende hier beyfügen.

190. Aufgabe und Exempel (zu 143, II u...
146). Es sey gegeben:

$q^b \varkappa 1$ $p^a \varkappa 1$ zu setzen ist).

Nun geben die obigen Reihen

$p^a \varkappa 1 = \alpha^a$	$q^b \varkappa 1 = f^{\nu b}$	$r^c \varkappa 1 =$
$p^a \varkappa 2 = {}^a\mathfrak{A}\, \alpha^{a-1}\beta$	$q^b \varkappa 2 = {}^{\nu b}\mathfrak{A} f^{\nu b-1} g$	$r^c \varkappa 2 =$
$p^a \varkappa 3 = {}^a\mathfrak{B}\, \alpha^{a-2}\beta^2$	$q^b \varkappa 3 = {}^{\nu b}\mathfrak{B} f^{\nu b-2} g^2$	$r^c \varkappa 3 =$

und diese, wie in (146) zusammengesetzt, den ge… Werth von $r^c q^b p^a$, das ist (die factores commune… q genommen)

$$f^{\nu b}\left[\alpha^a.\frac{c^2}{1.2} + {}^a\mathfrak{A}\,\alpha^{a-1}\beta.\frac{c}{1} + {}^a\mathfrak{B}\,\alpha^{a-2}\beta^2\right]$$

$$+ {}^{\nu b}\mathfrak{A}\, f^{\nu b-1} g\left[\alpha^a.\frac{c}{1} + {}^a\mathfrak{A}\,\alpha^{a-1}\beta\right]$$

$$+ {}^{\nu b}\mathfrak{B}\, f^{\nu b-2} g^2.\alpha^a$$

Für das dritte Glied also, oder für $(r^c q^b p^a) \rceil 3$ … man nur das hier Gefundene als Coefficient zu $x^{a\mu+b}$… setzen (Arch. der Math. H. II. S. 225, II). Für … $= \pi = 0$, wie in den Reihen (118 und 143) … dafür, x^2

191. Nach dem Lehrsatze (143) werden die Produkte aus mehrern Potenzen von Reihen auf Produkte von mehrern Gliedern oder Coefficienten der einzelnen Potenzen reducirt, so, daß diese Glieder oder Coefficienten immer ganz als Factoren darinn vorkommen. Diese Reduktion ist wichtig; denn wenn die $p^a \varkappa (n+1)$, die $q^b \varkappa (r+1)$ u. s. w. wegen der besondern Beschaffenheit der Coefficienten der Reihen p, q ... sich kürzer, als auf dem gewöhnlichen Wege (124, 129) ausdrücken lassen, oder, wenn man ihre Werthe schon anderswoher weis, ohne sie erst suchen zu dürfen; dahin z. B. die im obigen Exempel (S. 259) absichtlich gewählten Reihen p, q, r gehören (wegen der Reihe r sehe man Eul. Intr. in Anal. Infin. T. I. §. 116, 117): so kann man diese Ausdrücke oder Werthe sogleich an Ort und Stelle setzen und gebrauchen, und verhütet dadurch weitläuftigere und verwickeltere Formen, auf die man sonst verfällt, und deren Reduktion auf die gleichgültigen einfachern nicht immer leicht ist. Bemerkungen über diesen wichtigen Umstand, nebst Beyspielen, enthalten: Rothe, de Ser. Reverf. demonstr. p. 13 — 15; meine Paralip. ad Ser. Reverf. p. VII. III, α, β; Toepf. Combin. Anal. S. 175-180.

Wollte man die Aufgabe (190) nach Herrn Tetens 6ten Satze (S. 34, 35) lösen, so müßte man ihn erst von zwey Potenzreihen P^m, Q^h auf drey erstrecken, welches nicht so unmittelbar, wie bey meinem Lehrsatze (143) geschehen kann, wo man wegen der hinzukommenden dritten Potenz R^s nur die zweyte Variationsclasse ${}^{n+2}B$ in die dritte ${}^{n+3}C$ umwandeln darf; auch kommen (S. 35) außer denen von a anfangenden terminis generalibus, noch andere (also nicht überall Glieder von Potenzen der unverkürzten Reihen, wie bey mir) vor. Dieses, und das dabey vorzunehmende Substitutionsverfahren, macht offenbar die Auflösung weitläuftiger, als wenn solche

nach der Combinationsmethode (143) vorgenommen wird. Wer das aus dem hier Gesagten noch nicht deutlich übersieht, darf, zur Vergleichung, das obige Exempel (190. S. 259) nur nach der Substitutionsformel berechnen.

192. Für die Fälle, wo Sprünge in den Exponenten der einzelnen Reihenglieder vorkommen, wird (S. 24—26) erinnert, man dürfe nur die Coefficienten der fehlenden Glieder o gleichsetzen, und bey dem Substitutionsverfahren darauf Rücksicht nehmen. Das ist freylich der gewöhnliche Gang, den man auch sonst häufig befolgt, der aber zuweilen auf große Weitläuftigkeit führt, wie ich in meinem Programm (Paralip. ad Ser. Reverſ. p. XV, XVI, Schol. I und II) an zwey Beyspielen ausführlich gezeigt habe. Nämlich, wenn die Zahlen im Zeiger nicht nach der Ordnung, sondern sprungweise fortgehen, da giebt die Combinationsmethode kürzere und bequemere Auflösungen, wie ich an dem (S. 25, 26) an- und ausgeführten Exempel, in der dortigen Note o, gezeigt habe. Vorzüglich ist hierzu die Boscovichische Darstellung der Complexionen (Arch. der Math. H. IV. S. 409, 30) bequem; wie Boscovich (Giornale de' Letterati di Roma v. J. 1748. p. 86, 87) selbst erinnert hat. Gesetzt, man sollte, für seine dortige Reihe $p^m = (az^s + bz^{s+r} = cz^{s+2r} + \&c)^{\frac{m}{-}}$ den Coefficienten zu z^{ms+20r}, aber für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 7 & 10 \\ b & h & l \end{smallmatrix}\right)$ schaffen, so erforderte das alle Complexionen zur Summe 20 aus den Zahlen 1, 7, 10, und diese sind nach Boscovich's (im Arch. der Math. S. 410 angeführten) Darstellung keine andern, als folgende:

xionen allein abhängiges [Arch. d. Math. S. 389, 7
S. 397]) Vorschreiben der Binomial- und Polyno-
lcoefficienten und der Potenzen von a (nach Arch. der
th. S. 414, 37) den gesuchten Coefficienten zu z^{ms+20r}.
r·

$$x21 = \left\{ \begin{array}{l} {}^m\mathfrak{U}\,\mathfrak{u}\; a^{m-20} b^{20} + {}^m\mathfrak{O}\,\mathfrak{o}\; a^{m-14} b^{13} h \\ + {}^m\mathfrak{H}\,\mathfrak{h}\; a^{m-8} b^{6} h^{2} + {}^m\mathfrak{L}\,\mathfrak{l}\; a^{m-11} b^{10} l \\ + {}^m\mathfrak{E}\,\mathfrak{e}\; a^{m-5} b^{3} hl + {}^m\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}\; a^{m-2} l^{2} \end{array} \right\}$$

Buchstabencomplexionen sind hier aus jenen Zahlen-
plexionen rückwärts geschrieben, also gut geord-
t. Ich habe auch die Zeichen der Moivrischen Un-
, wie ich sie nenne, ${}^m\mathfrak{U}$u, ${}^m\mathfrak{O}$o ... ${}^m\mathfrak{E}$e, ${}^m\mathfrak{B}$b bey-
alten, theils der Kürze wegen, theils aber auch, weil
Bestimmung ihrer Werthe für jede Complexion nicht
geringste Schwierigkeit hat (Ebendas. S. 388, 4 und
dortigen Exempel). Hierher gehört auch Herrn D.
mps Behandlung des Beyspiels (hier S. 103, 6) und
ine Anmerkung dazu (S. 118—120, §. 3—6). Das
rfahren nach der Substitutionsmethode würde bey wel-
nicht so kurz ausfallen.

Formeln (die sich gewöhnlich auf sehr einfache Gesetz
ziehen) vorzüglich bequem, durch ihre kurzen bedeutu
vollen symbolischen Nachweisungen, den m
bequemen, oft hier und da zerstreut vorkommenden w
lichen Verordnungen, von denen auch das Substituti
verfahren nicht frey ist (Note q S. 35, 36) abzuh
die man doch zuvor kennen muß, wenn man die Fo
gehörig gebrauchen will. Und nun noch einige Bemer
gen überhaupt.

194. Der Ausdruck $p^m \varkappa (n+1) = m^{n+}$
(138) setzt überhaupt ein Verfahren voraus, die
Classe der Complexionen zur Summe n+m, für einen
gegebenen Zeiger, zu finden. Es seyen, für einen
stimmten Fall $n=6$; $m=4$ und die Zahlenelem
1, 2, 3, 4... so ist dafür $p^4 \varkappa 7 = \mathfrak{d}^{10}D$. Es giebt
rere Arten die Complexionen für ^{10}D zu finden, z. B.

Zahlen, die in (β) nach fallenden Endelementen, die i
(γ) in directer lexikographischer Ordnung, fortgehen. E
hat keine Schwierigkeit, die Abhängigkeit dieser so ve
schiedenen Formen sogleich zu übersehen; und so kan
man, eine wie die andere, für ^{10}D gebrauchen. Inzw
schen ist bereits festgesetzt worden — so lange nichts a
ders erinnert wird — die Complexionen in (α) für ^{10}
zu nehmen, weil mehrere, in vieler Rücksicht nützliche B
dingungen sich bey ihnen zusammen vereinigen; den
1) ihr Combinationsgesetz ist leicht; 2) sie sind sämtli
gut geordnet; 3) sie gehen wie wachsende Zahlen fort;
sie zeigen zugleich eine lexikographische Folge; 5) ihre Or
nungen fangen von 1 an, und gehen nach 2, 3 u. s.
fort; 6) sie geben endlich eine Involution, wie die ei
geschriebenen Winkel in (52, α) sogleich nachweisen. E
steht also Jedem frey, wie er die Complexionen von ^{10}
entwickeln will; aber eine leichte bequeme Regel das zu thu
muß gleichwohl (wie hier in 49, 50) angegeben werden

195. Eben so kann man in dem allgemeinen Au
drucke (139, 129)

$$\mathfrak{p}^m x(n+1) = {}^m\mathfrak{A} a^{m-1} \mathfrak{a}^n A + {}^m\mathfrak{B} a^{m-2} \mathfrak{b}^n B + {}^m\mathfrak{C}^{m-3} \mathfrak{c}^n C$$

Daß alſo der Binomialcoefficient und die Potenzen

von der Zahl der Claſſe, oder, welches einerley

der Anzahl der Factoren in den einzelnen

plexionen abhångig ſind.

Bezeichnet man nun überhaupt die Combinati plexionen mit Wiederholungen zur Summe n, nac Claſſen ^{n}A, ^{n}B, ^{n}C, ^{n}D... zuſammen, allgemei $^{n}[C]$, wie auch nur die einzelnen Complexionen d ander laufen mögen (welches auf das Entwickelu dafür ankommt) wenn man ſie nur alle hat: man die obige Formel ſehr verkürzt und ſehr allg ausdrucken:

$$p^{m} \varkappa (n+1) = ({}^{m}\mathfrak{A}\, a)^{*-1}\, a^{m-*}\, {}^{n}[C]$$

$$p(a\ b\ c\ d)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & e \end{pmatrix}$$

Der Werth des Zeichens * wird nehmlich hier d Anzahl der Factoren b, c, d, e... in den einzeln plexionen beſtimmt, und

, statt jenem C mit der Klammer, setzen, und so ^nJ
r Involutionen nach Zahlenordnung die Complexionen
ngirt, und $^n\mathfrak{J}$ in lexikographischer Folge, beide zur
umme n, gebrauchen; und so kommt, statt des vorigen
usdruckes, nun

$$p^m \varkappa(n+1) = (^m\mathfrak{A}\,a)^{*-1}\, a^{m-*}\ {}^nJ$$

$$p^m \varkappa(n+1) = (^m\mathfrak{A}\,a)^{*-1}\, a^{m-*}\ {}^n\mathfrak{J}$$

$$\begin{pmatrix} = & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ a & b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix}$$

er kann man die Involutionen ^nJ, $^n\mathfrak{J}$, wie man will
twickeln; doch wird man auf keinen Fall dafür etwas
sseres und Leichteres finden, als die Classeninvolution
^nJ, und die beiden lexikographischen für $^n\mathfrak{J}$ (nach
, S. 183). Wenn man hier in den Formeln nach
d nach 1, 2, 3, 4 . . . statt n setzt, so findet man
durch alle Glieder von p^m in der Ordnung, wie sie auf
s erste folgen, das für sich gegeben ist.

sche Jot, nach der Analogie der andern kleinen deut
Buchstaben a, b, c ... die Versetzungszahlen oder die
lynomialcoefficienten der einzelnen Complexionen der d
ben stehenden Involutionen andeutet) drücken immer
Classen a^nA, b^nB, c^nC ... mit ihren Versetzungsza
a, b, c ... zusammen aus (41, S. 183).

Setzt man hier beyspielsweise n = 7 und bra
man für $^7\mathfrak{J}$ die dortige (S. 183) erste lexikograph
Darstellung, welche die eingeschriebenen Winkel hat
darf man um $j^7\mathfrak{J}$ zu haben, nur allen dortigen C
plexionen die zugehörigen Versetzungszahlen vorschre
Jene äußerst leichte combinatorische Darstellung
aber nicht blos die Involution zur Summe 7, son
auch die zu den Summen 6, 5, 4, 3, 2, 1 zugleich
so, daß man die Complexionen aller niedrigern Invol
nen durch die der höhern zugleich mit gefunden hat,
her man aus $p^m\varkappa(n+1)$ die vorhergehenden p^m
$p^m\varkappa(n-1)$... und auf ähnliche Art auch $p^m\varkappa(n+$
$p^m\varkappa(n+3)$ u. s. w. auf die leichteste Art darstellen

kannten Wegen, nur immer zu leisten vermag. Die Auf
sung des Problems, nach diesem seinem Verfahren, ist a
unstreitig unter allen nicht-combinatorischen die leicht
in der Ausübung; nur allein die combinatorischen (me
Classenauflösung, so wie die Moivrische und Boscovic
sche lexikographischen, nach der von mir im Archiv
Mathematik [H. IV. S. 385 u. f.] gegebenen Darst
lung) gehen ihr an Leichtigkeit und Kürze der Entwic
lung und Anordnung, so wie an Mannichfaltigkeit, d
Gefundene verschiedentlich weiter (nicht blos dafür, wo
man es gesucht hatte) zu benutzen, vor. Der Gru
liegt darinn, daß keine andere Methode im Stande
das Wesentliche combinatorischer Involutionen darzust
len oder zu erreichen. Das lehrt unter andern meine A
handlung (Arch. der Math. H. III. S. 319—336) s
deutlich und anschaulich. Ich will aus ihr blos auf §.
(S. 323—325) verweisen; man wird, was dort
Beziehung auf die continuirlichen Brüche gesagt word
ist, leicht auf die Potenzcoefficienten anwenden, weil
lexikographischen Involutionen $^{n}\mathfrak{J}$ (41, S. 183)
die ich mich hier beziehe, mit den dortigen Involution
ähnlich sind, und beide, wie die eingezeichneten Win

plexionen (Ebendas. S. 331, 18) ist schon ein wir
ches Combiniren der Elemente, das selbst durch
gewählte Stellung derselben sich empfiehlt (Ebend. S.
21) und schon gutgeordnete Complexionen in
gutgeordneten Folge giebt — aber noch keine
volution — wohin nur noch ein unbeträchtlich kl
Schritt, oder, wenn man will, ein überaus großer Spr
(man kann beides sagen und beides rechtfertigen [Eb
S. 333, 22 und 330, 15]) zu thun übrig war.

b) Herr Tetens glaubt, seine blos analytische
mel, wie er sie nennt, gebe die gesuchten Theile der C
ficienten auf dem kürzesten Wege, es könne keine kü
Methode geben (S. 18, 11); Dan. Bernoulli (
a. a. O. S. 332, 19) nennt die von ihm angegebene
kürzung des gewöhnlichen Verfahrens, praestantissim
compendium, und bemerkt, der Weg, den er hier gehe,
der natürlichste von allen, die man nur einschlagen kö
Sehr wahr und sehr richtig, von beiden Seiten! V
Verfahren nehmlich sind offenbar die leichtesten, welche
Analysis wählen kann, so lange sie die Vortheile der

199. Noch muß ich eines wichtigen Vorzuges d
combinatorisch-analytischen Formeln und Anordnung
gedenken, daß nehmlich die Beweise der in solchen Forme
dargestellten Sätze gewöhnlich sehr kurz und leicht ausf
len. Man lese Herrn Tetens (S. 26 — 32, §. 14, 1
gegebenen Beweis seiner allgemeinen Formel (S. 13) f
ganze positive Exponenten m (für negative und gebroche
Exponenten wird (§. 16) ein anderer Beweis beygebrach
und vergleiche solchen mit dem meinigen (von S. 22
— 233. Ich habe nehmlich hier den Beweis für d
Produktensatz (118) mit eingeschlossen, weil ich solch
in dem Beweise des Polynomialpotenzenproblems (12
als bekannt voraussetze). Noch auffallender zeigt sich d
Sache bey der Vergleichung der Sätze (S. 34, 17 u
S. 237, 143) und ihrer Beweise (S. 36 — 38 — 40 u
S. 239), wo man den Beweis des viel zusammengese
tern Satzes dennoch leichter und kürzer finden wird, a
den des einfachern und weniger zusammengesetzten. D
so leichte Uebergang von den combinatorischen Hülfs- u
Vorbereitungssätzen auf diejenigen, die durch sie erwies
werden sollen, hat auch Herrn Prof. Klügel eingeleuc
tet, welcher für die Potenz (a + b + c + d + &c)

binatorischen Darstellung nach Classen, ausführlich (
— 13) gehandelt, auch die Vorstellung des Ganges,
man nehmlich von der Lokalformel zur combinatori
und von dieser weiter, zu ihrer Auslegung und Umse
in die gewöhnliche algebraische Sprache, fortschreite
einer beygefügten Tafel anschaulich vorgelegt; alles i
Absicht, um den Leser mit den combinatorischen Beg
und ihrer Behandlung und Verarbeitung in der An
bekannter zu machen, und so auf den eigentlichen Gegen
seiner Schrift desto besser vorzubereiten. Herr von
hat die Entwickelung der Complexionen in den ein
Classen (Probl. §. IV) an die Bedingung (Probl. §.
gebunden, Complexionen aus Complexionen, jede n
folgende aus der unmittelbar vorherge
den, abzuleiten. Von einem solchen Verfahren im
meinen, sehe man (hier 16). Es ist nicht rein-combi
risch; ist aber dort deswegen gewählt worden, weil
unmittelbare Beziehung, welche Zahlen- und Bu
bencomplexionen, nach dem Zeiger, gegen ein
haben, und wie man sich bestimmte Summen be
Buchstabencomplexionen denken könne, sehr deutlic

Substitutionszeichen und Verfahren, so deutlich auszu-
drücken und so leicht zu entwickeln, als in Herrn von
Prassens Schrift, vermittelst combinatorischer Zeichen
und Verfahren geschieht.

201. Da das der Fall bey mehrern, zum Thei
sehr verwickelten, Aufgaben ist, auf welche die combina
torische Analysis bereits mit großem Nutzen ist angewen
det worden; so muß die von Herrn Etatsrath Tetens
(S. 4) vorgelegte so ganz positive Aeußerung „„di
„Combinationsmethode werde durch das Substitutions
„verfahren, nicht nur bey dem Polynomialpotenzenpro
„blem ganz entbehrlich; sondern dies werde sie auc
„bey andern Problemen, wo man seine Zuflucht
„zu ihr genommen habe““ allerdings Jeden befremden
der jene Methode und ihre Anwendung auf analytisch
Probleme kennt; um so mehr, da man den oben (147
150) angeführten Umständen nach, selbst wegen de
Entfernung des Wohnorts, annehmen kann, Herr T
ens sey mit dem gegenwärtigen Zustande dieser Wissen
schaft nicht hinreichend genug bekannt gewesen. Ich kan
mir die Veranlassung zu einem solchen Ausspruche nic

lich seyn würde.

202. Allein, so wie Combinationsmethode en
dene Vorzüge vor dem Substitutionsverfahren, selb
dem Potenzenprobleme, hat (156, 157), so zeige
solche um so mehr, bey noch viel verwickeltern Aufg
die übrigens die von den Potenzen der Reihen voraus
Man suche nur, um sich davon zu überzeugen, au
Gleichung z. B. $az^3 + bz^5 + cz^7 \ldots = \alpha x^1 + \beta x^2 +$
die Potenz x^s durch z und die gegebenen Coefficienten a,
$\alpha, \beta, \gamma \ldots$ vermittelst des Substitutionsverfahre
bestimmen, wie ich (Paralip. ad Ser. Reverſ. p. XIV.
durch die Combinationsmethode gethan habe; oder
suche, durch Anbringung eben dieses Verfahrens, au
Gleichung $y = x - z x^{mx}$ den Sin. x durch y und z
zudrücken, wie Herr Prof. Rothe (Arch. der Math.
S. 448, 26), durch combinatorische Reversion ver
hat. Die Schwierigkeit wird sich alsdenn von selbst
offenbaren. Eben so würde man die schöne Harm
welche die combinatorischen Zeichen bey den Sätze

S

ionsverfahren weit zurückbleibt (189, 191). Die Methode dient bey Transformationen, Substitutionen und Interpolationen der Reihen, die oft so beschwerlichen Arbeiten dabey zu erleichtern und abzukürzen. Cramer (Introd. à l'Anal. des Lignes courbes p. 656, seq.) und Bezout (Théorie generale des équat. algebr.) haben sie auf die so weitläuftige und schwere Aufgabe der Elimination der Größen angewendet; wovon ich in der Vorrede zu Rüdigeri Specim. de lin. curv. sec. ordinis ausführlich gehandelt und zugleich gezeigt habe, wie das Bezoutische Verfahren in dem dort aufgeführten Probleme ein wirkliches combinatorisches sey, das sich, auf dem Wege, den Cramer eingeschlagen hat, durch Anwendung meiner Zeichen sehr verkürzen und zugleich ganz deutlich darstellen lasse. So hat auch Herr Doctor Kramp theils in den oben vorgelegten, theils hier noch nicht abgedruckten, noch im Manuscript bey mir befindlichen Aufgaben, sehr mannichfaltigen und wichtigen Gebrauch von der Combinationsmethode gemacht, solche auch bey und auf unbestimmte Aufgaben angewendet. Dahin gehört auch meine Abhandlung über die cyklischen Perioden (Magaz. der Math. 1786. St. III S. 281-324), di

(Ebend. S. 332, 19), die Analys…
ihren bis dahin bekannten Mitteln, zu weiterer Abkü…
zu allgemeinerer Darstellung, zu deutlicher Vorlegu…
Bildungs- und Fortgangsgesetzes, nichts weiter h…
setzen vermag, und daß man diese Vortheile z…
men und auf einmal erhält, sobald man die hi…
kommenden Combinationscomplexionen involut…
ordnet und zusammensetzt (Ebend. S. 334, 335).
Sache verdient noch etwas genauer erwogen zu we…

Folgendes Schema

0	2	4	6	8	10
0	2	4	6	9	
0	2	4	7	10	
0	2	5	8	10	
0	2	5	9		
0	3	6	8	10	
0	3	6	9		
0	3	7	10		
1	4	6	8	10	
1	4	6	9		
1	4	7	10		
1	5	8	10		
1	5	9			

A = {all rows above}; the rows beginning with 0 (columns from 2 onward) = B; the rows beginning with 1 = C.

das man sehr leic…
dem Anfange $\begin{vmatrix}8 & 1\\ 9 & \end{vmatrix}$…
binatorisch entw…
stellt von den con…
lichen Brüchen

$$Z = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4 \;\&c}}$$

oder $z = \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4 \;\&c}}$

an überall die 0 absondert, und in der Ordnung 2 der übrigen Complexionen überall 1 statt 2 setzt, mit Beybehaltung der übrigen danebenstehenden Zahlen, die hier sämtlich Lokalzeichen sind (Ebend. S. 49, 154).

Diese Vortheile verschaffen die figürlichen Anordnungen involutorischer Darstellungen; und so etwas kann keine andere Methode leisten.

205. Hat doch unser Aller Lehrer und Meister in der Analysis — der große Euler, von den continuirlichen Brüchen geäußert, das Gesetz, nach welchem Zähler und Nenner in den einzelnen Werthen dieser Brüche, aus den Buchstaben sich zusammensetzen, sey nicht leicht durchzusehen (Introd. in Anal. Inf. T. I. §. 359), hat selbst, vornehmlich zu Auffindung dieses Gesetzes, einen eigends dafür eingerichteten Algorithmen ausgedacht (Nov. Comm. Ac. Sc. Petrop. T. IX. . 53 — 69; vergl. Arch. der Math. H. III. S. 335. 336). Und gleichwohl liegt das tief verborgen geachtete Gesetz in Herrn Eulers (Introd. &c §. 359, 360) — wirklich combinatorischer Auflösung — und wird sogleich durch meine involutorische Behandlung und Anordnung sichtbar

sich solchen combinatorischen, mehr oder weniger ein
Formen, auf die man früher gekommen seyn würde,
man gleich anfangs, bey der Auflösung selbst, Rü
darauf genommen hätte (4. S. 156). Auf solche F
nun sind Leibnitz, Jac. Bernoulli, de Moivre, Cramer
covich, Bezout, Castillon und andere, von Zeit zu Ze
fallen, und haben die Wirksamkeit ihrer Formeln m
wunderung gerühmt und anempfohlen. Es war also
einmal nöthig, diese Formen genauer kennen zu lerne
Allgemeine dabey aufzusuchen, eine Theorie der Con
tionsmethode festzusetzen, und zu zeigen, wie sich
eine ganz allgemeine Anwendung in der Analysis m
lasse. Hierher gehören meine lokal- und combin
schen-Zeichen und Formeln, mit ihrer bestimmten
hung auf einander.

206. Der erste Hauptsatz in der Lehre von den
chungen, worinn angegeben wird, wie die Coeffic
einer Gleichung aus ihren Wurzeln zusammengesetz
(Kästn. An. endl. Gr. 224) wird von Newton (A
Univ. p. 191. Ed. Grav.) und Andern in einer Form

geben, die vollkommen combinatorisch ist. Sein Inhalt ist nehmlich von der Beschaffenheit, daß die combinatorische Form dabey sich von selbst ergiebt. Unmittelbar mit diesem Satze verbindet Newton (das. p. 192) einen andern, vom Verhalten der Coefficienten der Gleichungen zu den Summen der Potenzen ihrer Wurzeln (gewöhnlich der Newtonische genannt) der aber von ihm und allen seinen Nachfolgern in involutorisch-recurrirender Form ausgedrückt worden ist. Beide Sätze sind gleichwohl blos ein paar specielle Fälle, aus unzählig viel andern, die eben so viel Theoreme darstellen würden; wie ich bereits, gelegentlich (*Nov. Syst. Perm.* p XXVIII unten) erinnert habe. Von diesen Sätzen die erheblichsten auszuwählen; dieselben genauer, nach ihrer direct-combinatorischen und involutorisch-recurrirenden Form, kennen zu lernen; nachzusehen, welche davon bereits bekannt oder neu oder sonst noch nachzusuchen sind, kann nicht anders als wichtig für die Analysis seyn. Hierher gehören Herrn D. Kramp's (S. 105 — 112) und des Herrn von Prasse combinatorisch-analytische Untersuchungen. In des Letztern Schrift (s. S. 86, m) findet man die Glieder, die man sucht, immer auf eine doppelte Art, dependent und independent, angegeben; denn die Combinationsmethode, wie ich bereits anderwärts (Paralip. ad Ser. Reverſ. p. XXIV) angemerkt habe, gewährt den Vortheil, die Glieder eben so leicht unabhängig von vorhergehenden, als abhängig von ihnen, auszudrücken. Man hat also für den Gebrauch die Auswahl, und ist auf den Fall nicht, wie bey den gewöhnlichen Methoden, einseitig eingeschränkt.

207. Dies zusammen kann mehr als hinreichend seyn, die Wichtigkeit und Nothwendigkeit combinatorisch-analytischer Untersuchungen festzusetzen. Daß die Erforschung der Anzahl der möglichen Permutationen, Combinationen

der **Anzahl** der einzelnen Formen oder Fälle, au
Formen selbst in ihrer **wirklichen Darstellung**
ich combinatorische Operationen nenne) kennen müss
gentlich sollte man damit (und das wird man auch t
thun) den Anfang machen, weil sich die Untersuchunge
die Anzahl der einzelnen Complexionen, aus den G
nach denen sie sich darstellen lassen, leichter, als au
bisher eingeschlagenen Wege ergeben; und manche F
zu deren Beantwortung man sich oft unendlicher, zum
recurrirender, Reihen und Integrationen bedient ha
sen sich, eben so **allgemein** ganz **elementarisc**
weilen selbst **kürzer**, abthun. Ich will, statt all
dern, hier blos **Eulers** Abhandlung de Partition
merorum (Intr. in An. Inf. C. XVI und Nov. Com
Sc. Petr. T. III. p. 125 seq.) anführen, und dabe
Toepf. Comb. Anal. (S. 44, 45) und aufs Arch. d.
(H. I. S. 42, 43) verweisen.

208. Noch habe ich eine Schuld abzutragen
vielleicht ist hier der schicklichste Ort mich ihrer zu e
gen, weil dadurch das Vielumfassende der Combina

methode von neuem recht anschaulich sich darstellen läßt. Von der Wichtigkeit der (68. S. 204) aufgestellten allgemeinen Classeninvolution, habe ich bereits dort und in der Folge ausführlich gehandelt. Eben so wichtig in ihrer Art ist auch die allgemeine lexikographische Involution (66. S. 202); diese ist es, auf die ich mich (S. 109. Anm. 1) berufen, und behauptet habe, daß sie das dort angegebene, sehr leichte, Verfahren, an Allgemeinheit und Leichtigkeit noch bey weitem übertreffe.

Wollte man z. B. sogleich die Summen der zehnten Potenzen von zehn Größen Z, Y, X, V &c haben (wie S. 107 nur von vier Potenzen $Z^{10} + Y^{10} + X^{10} + V^{10}$ vorkommen, die von den vorhergehenden niedrigern Potenzen sind abgeleitet worden), so darf man nur (ich will hier, zu Ersparung des Raums, kleine Buchstaben, a, b, c... statt der großen A, B, C... auf S. 107 brauchen) in der Involution (S. 202) $n = 10$ und a, b, c, d... statt der dortigen b, c, d, e... setzen: so erhält man

a^9 [a]
a^8 [b]
a^7 [c]
a^6 [b^2, d]
a^5 [bc, e]
a^4 [b^3, bd, c^2, f]
a^3 [b^2c, be, cd, g]
a^2 [b^4, b^2c, bc^2, bf, ce, d^2, h]
a^1 [b^3c, b^2e, bcd, bg, c^3, cf, de, i]
a^0 [b^5, b^3d, b^2c^2, b^2f, bce, bd^2, bh, c^2d, eg, df, e^2, k]

Herr D. Kramp (hier S. 108, c) fordert die einzelnen Glieder der Reihe $Z^n + Y^n + X^n + V^n +$ &c der allgemeinen Form $A^p B^q C^r D^s$ . . . für die Bedingungsgleichungen $p + q + r + s +$ &c $= m$ und $p + 2q$

Für $n = 10$ und vier Potenzen $Z^{10} + Y^{1}$
$+ V^{10}$, wie bey Herrn Kramp (S. 107), dü
aus der obigen Darstellung nur die Complexione
halten, in denen blos a, b, c, d vorkommt, mit
hung der übrigen, die auch e, f, g . . . enthalten
gäbe folgende Complexion
sie hier zur Seite stehen.

$a^9 [a]$
$a^8 [b]$
$a^7 [c]$
$a^6 [b^2, d]$
$a^5 [bc]$
$a^4 [b^3, bd, c^2]$
$a^3 [b^2c, cd]$
$a^2 [b^4, b^2d, bc^2, d^2]$
$a^1 [b^3c, bcd, c^3]$
$a^0 [b^5, b^3d, b^2c^2, bd^2, c^2d]$

Man kann aber diese Co
nen, für den obigen Werth
auch aus a, b, c, d unmit
construiren, indem man, zu
ersten für sich geg
Complexionen $a^9[a]$; $a^8[b$
die folgenden nach der
(S. 203) sucht; nehmli
len in der vorletzten
stehenden Complexionen setzt man b vor, und 2)
nigen Complexionen der letzten Klammer, die
nur einen Buchstaben, oder zwey ungleiche Anfa
staben haben, verwechselt man den ersten Buchst

c, d die Factoren + A, — B, + C — D gesetzt, giebt
s vollkommen, wie (S. 107 unten).

209. Herr D. Kramp hat, nach dem von de
ivre bey recurrirenden Reihen eingeführten Verfah-
die Glieder der Scale + A — B + C — D einzeln,
ihren Zeichen, in die vier nächstvorhergehenden Werthe
niedrigern Summen Z^9 + &c; Z^8 + &c; Z^7 + &c;
+ &c; multiplicirt, und daraus die gleichnamigen
dukte zusammenaddirt. Dadurch erhält man zwar die
lencoefficienten zugleich mit ihren Zeichen: aber um Z^{10}
Y^{10} + X^{10} + V^{10} zu bestimmen, muß man erst nach
nach alle vorhergehende niedrigern Summen schaffen.
ses, so wie das Zusammennehmen der gleichartigen
dukte (das, ohne sie besonders abzusetzen, nicht gesche-
kann) ist, bey aller Leichtigkeit des Verfahrens an
, dennoch weitläuftig; und man kann weit eher, auf
von mir gezeigten involutorischen Wege, die Summme
zehn Potenzen Z^{10} + X^{10} + &c von vorhergehen-
Summen independent finden, als von vier Potenzen
dem gewöhnlichen Moivrischen dependent. Allge-
nheit im Ausdrucke, Leichtigkeit in der Darstellung und

gen Abschnitts an und für sich ist, so kurz kann
gleichwohl hier seyn. Denn einestheils ist die Un
lichkeit der bisher eingeführten und gebräuchlichen
bekannt genug *) anderntheils erhellet, selbst sch
dieser Schrift, die Art und der Gebrauch der zu
lenden neuen Zeichen, und wie dadurch der Grun
ner vielumfassenden combinatorischen Zeichensprac
einer durch sie möglichen, und immer weiter zu
kommnenden, höchstallgemeinen Auflösungskunst,
werden könne. Nachstehende Bemerkungen über
interessanten Gegenstand werden hier nicht üb
seyn.

*) Ich könnte, wenn es nöthig wäre, mehrere St
Herrn Professor **Klügels** Briefen an mich hier
wo dieser vortrefliche Analyst, von dieser Unzulängli
bis itzt bekannten und gebräuchlichen Zeichen in der
spricht, und die Einführung zweckmäßiger, bedeutend
verständlicher, die Uebersicht erleichternder, allgeme
chen, von unabänderlicher Bedeutung, billiget; w
die hier nur gelegentlich gethane Aeußerung (S.
Note, und S. 88) über meine Zeichen übereinstimm
bekannt, wie willkührlich die Analysten nicht selten di
die sie brauchen, wählen, und daß dabey bis itzt im
nen noch nichts Bestimmtes ist festgesetzt worden.

en, sind eigene, bestimmte und bleibende Zeichen wählen, und ein und für allemal festzusetzen.

Dahin gehören die eigentlich combinatorischen, lokal- und andern (theils im Nov. Syst. Perm. eils im Archiv und selbst in dieser Schrift hier und da klärten) Zeichen.

d) Die ungleichartigen Dinge müssen jedes für sich zeichnet, nicht etwa zwey- oder mehrere durch ein Zein dargestellt werden.

e) Die Zeichen müssen bey ihrer Zusammensetzung t zusammen passen, und die vollkommenste Harmonie weisen. Es muß eine große Menge sehr zusammengeter Begriffe, durch wenige, äußerst einfache, leicht ständliche Zeichen kurz und bequem sich darstellen lassen.

f) Die neuen Zeichen müssen endlich die Bezeichng der übrigen Analysis auf keine Weise beschränken.

Das ist auch der Fall bey meinen combinatorien, meinen lokal- und andern Zeichen. Noch können B, C, D ... A, B, Γ, Δ ... 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 ... a, b, c, d ...

$n = 8$, so erhellet sogleich, daß der $(8+1)$te vo

Coefficient der Potenz p^m aus folgenden vier Be-
theilen zusammengesezt ist:

1) aus den Binomialcoefficienten

$^m\mathfrak{A}$, $^m\mathfrak{B}$, $^m\mathfrak{C}$, $^m\mathfrak{D}$ . . . . . $^m\mathfrak{H}$

2) aus den Potenzen

a^{m-1} a^{m-2} a^{m-3} a^{m-4} . . . . . a^{m-8}

3) aus den Combinationsclassen

^8A ^8B ^8C ^8D . . . . . ^8H

10) aus den Versetzungszahlen

$\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{d}$ . . . . . $\mathfrak{h}$

Hier sind a^{m-1}, a^{m-2} . . . auf die gewöhnliche Art g nete Potenzen von a. Die übrigen Zeichen beziehe auf Zahlen und Größen bestimmter Formen, die, w in den Auflösungen der Aufgaben unzählige mal kommen, immer auf eine und dieselbe Art vo dargestellt werden. Die lateinischen senkrechten g

(Versal) Buchstaben, mit dem Summenexponenten oben linker Hand, ^8A, ^8B, ^8C ... stellen Combinationsclassen zur Summe 8 (die erste, zweyte, dritte ... u. s. w.) vor, wo die Zahlen 1, 2, 3 ... sich auf die Buchstaben b, c, d ... beziehen, wie solches der der Formel (S. 70) beygefügte Zeiger nachweiset. Diesen sind Binomial- und Polynomialcoefficienten (Versetzungszahlen) zugeordnet, von denen jene sich auf ganze Classen, diese auf einzelne Complexionen der Classen beziehen; und aus dieser Ursache sind auch die erstern mit großen, die andern mit kleinen deutschen Buchstaben gezeichnet. Bey den Binomialcoefficienten zeigt der große deutsche Buchstabe, die Stelle (der erste, zweyte, dritte ...) der kleine lateinische oben linker Hand, den Exponenten an. Sie sind also vollständig gezeichnet. Die kleinen deutschen Buchstaben, in Verbindung mit den Classenzeichen (a^8A, b^8B, c^8C ...) beziehen sich, als Versetzungszahlen, auf die einzelnen Complexionen der nebenstehenden Classe, wobey es auf Menge der Factoren, und ob einige derselben wiederholt vorkommen, ankommt. Die Zeichen sind sämtlich so gegen einander abgeglichen, daß die Vereinigung derselben, wie sie hier unter einander stehen, die vollkommenste Harmonie darstellt, die selbst hevristisch wichtig werden kann, und sich bereits so bewiesen hat (Toepf. Combin. Anal. S. 170 u. f.).

213. Bey so sehr zusammengesetzten Begriffen, wie in 211 (und um so mehr bey andern noch weit verwickeltern Aufgaben) vorkommen, ist es wichtig, dem Leser durch eine etwas detaillirte, in bestimmter (der besten) Ordnung zu verfolgende Analyse, zu Hülfe zu kommen. Das kann am besten durch Zurückführung der gewöhnlichen Operationen, auf combinatorische, geschehen, und diese Operationen, will man anders Kürze mit Deutlichkeit vereinigen, müssen mit ihren Zeichen in der Formel selbst aufge-

führt werden, damit man, wegen der vorzunehmenden combinatorischen Arbeiten nicht erst auf andere Zeichen verweisen darf. Auch giebt es eine Menge Relationen zwischen ihnen, die bereits bekannt sind, und gegen einander sich austauschen lassen. Die Combinationstheorie zeigt, wie man die Werthe der vorkommenden combinatorisch zusammenzusetzenden Bestandtheile leicht finden und angeben kann; und so hat die Auflösung der Formel (211) keine Schwierigkeit. Ihr Werth steht bey Herrn Klügel (S. 70) neben I. Die Bedeutung der dortigen (den Potenzen von a vorgesetzten) Binomialcoefficienten ist für sich klar. Was aber daselbst in den Klammern steht, sind die, nach dem Zeiger entwickelten Combinationselemente $a^8A = i$; $b^8B = 2bh + 2cg + 2df + e^2$; u. s. w.

214. Nach den Relationen in (196) hätte man statt $a^8A + b^8B + c^8C \ldots$ (in 211) auch j^8J oder $j^8\mathfrak{J}$ gebrauchen können. Die Schwierigkeit, welche die Coefficienten ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C} \ldots$ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ und die Potenzen a^{m-1}, a^{m-2}, $a^{m-3} \ldots$ (welche dort bestimmten Classen ${}^8A$, ${}^8B$, ${}^8C \ldots$ zugehören) hier machen, wird in (195. S. 266) gehoben, wo also

$$p^m \varkappa(n+1) = \overset{*-1}{({}^m\mathfrak{A}\,\mathfrak{a})}\, a^{m-*}\, {}^nJ = \overset{*-1}{({}^m\mathfrak{A})}\, a^{m-*}\, j^n J$$

$$p^m \varkappa(n+1) = \overset{*-1}{({}^m\mathfrak{A}\mathfrak{a})}\, a^{m-*}\, {}^n\mathfrak{J} = \overset{*-1}{({}^m\mathfrak{A})}\, a^{m-*}\, j^n\mathfrak{J}$$

Man könnte hier die ${}^nJ$ und ${}^n\mathfrak{J}$ mit Herrn Prof. Klügel (S. 59) entwickeln, ohne sich um ihren Ausdruck nach den dabey vorkommenden Classen ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC \ldots$ oder Ordnungen ${}^n\mathbb{A}$, ${}^n\mathbb{B}$, ${}^n\mathbb{C} \ldots$ (41. S. 183) zu bekümmern, die zwar combinatorischwichtig aber nicht schlechterdings (wenigstens nicht in allen Fällen, wie z. B. bey den obigen beiden Formeln) analytischnothwendig sind. Für $n = 8$ fände man, nach der ersten Formel, alles

215. Die combinatorisch-analytische Formel, mit
m untergesetzten Zeiger, giebt also jedesmal aufs ge-
ueste an, was für combinatorische Arbeiten man zu ver-
hten habe, die sich auf bestimmte Verfahren beziehen,
odurch man das zu Suchende findet. Man sieht so-
eich, ob und was man permutiren, variiren, oder
nbiniren soll; ob dabey Wiederholungen verstattet sind
er nicht; ob einzelne Classen oder Summen von Classen;
nze Classen oder nur einzelne Ordnungen derselben, zu
hmen sind; ob Binomial- und Polynomialcoefficienten,
d was sonst für andere Zahlen und Größen zugleich mit
rkommen; u. s. w. Alles ist hier so klar und deutlich
fgestellt, daß man sich dabey gar nicht irren kann, alles
schon so weit vorbereitet (213), daß die endliche Auf-
sung der Formel nun mit größter Leichtigkeit erfolgt.

So viel im Allgemeinen von den combinatorisch-ana-
tischen Formeln. Eben so wichtig sind in ihrer Art die
kalformeln, die mit jenen in der genauesten Verbindung
hen (4, S. 157; 140, S. 235, 236; 153, S. 247,
48).

$$B = \frac{\quad\quad}{\alpha} = \frac{\quad\quad}{\alpha} = {}^{3}B = (q^{-1}p)$$

$$\dot{C} = \frac{c - {}^{3}\overset{qp}{B}}{\alpha} = \frac{c - (qp)\varkappa 2}{\alpha} = {}^{4}\overset{q^{-1}p}{B} = (q^{-1}p)$$

$$\dot{D} = \frac{d - {}^{4}\overset{qp}{B}}{\alpha} = \frac{d - (qp)\varkappa 3}{\alpha} = {}^{5}\overset{q^{-1}p}{B} = (q^{-1}p)$$

= = = = =

$$\overset{\dot{n}}{A} = \frac{\overset{n}{a} - {}^{n+1}\overset{qp}{B}}{\alpha} = \frac{a - (qp)\varkappa n}{\alpha} = {}^{n+2}\overset{q^{-1}p}{B} = (q^{-1}p)$$

$$p\,[\overset{1}{\dot{A}}\;\overset{2}{\dot{B}}\;\overset{3}{\dot{C}}\;\overset{4}{\dot{D}}\ldots] \qquad p\,[\overset{1}{a}\quad\overset{2}{b}\quad\overset{3}{c}\quad\ldots$$

$$q\,[\beta\;\gamma\;\delta\;\varepsilon\ldots] \qquad q\,[q^{-1}\varkappa 1,\, q^{-1}\varkappa 2,\, q^{-1}\varkappa 3$$

Hier werden die Coefficienten $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$ ... $\overset{\dot{n}}{A}$, vom zw
bis mit dem (n+1)ten, jeder in einem vierfache
drucke dargestellt. Die beiden ersten (Toepf. Com

q′, wie

Jov. Syst. Perm. p. LXXX. Dies nur um zu zeigen, wie
icht hier beiderley Ausdrücke (der dependente und inde-
endente) sich ergeben, und welche combinatorische Ge-
tze sie befolgen.

216. Den Hauptsatz in der Lehre von den Glei-
hungen, das **Verhalten der Wurzeln** ($x = a$;
$= b$; $x = c$ u. s. w.) einer **Gleichung** zu den **Coef-
cienten** derselben, in combinatorischen Zeichen aus-
drücken.

Für m Wurzeln giebt das Produkt von eben so viel
Burzelfactoren ($x - a$; $x - b$; $x - c$; u. s. w.) die
leichung

$$x^m - A'x^{m-1} + B'x^{m-2} - C'x^{m-3} \ldots \mp \mathcal{M}'x^{m-m} = 0$$

$$(a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ldots)$$

ie Classen A', B', $C' \ldots \mathcal{M}'$ enthalten hier Combinationes
r Elemente a, b, c... **simpliciter, ohne Wieder-
olungen.** Das sehr leichte combinatorische Verfah-
n dafür, zeigt (Infin. Dign. p. 161). Man übersieht es
ch sogleich aus jenem andern mit Wiederholungen

in der recurrirenden	in der independ
$[1(m+1)-n]b\,p^m\,\varkappa\,n$	$m\mathfrak{A}\,a^{m-1}\,q^1\,\varkappa$
$+[2(m+1)-n]c\,p^m\,\varkappa(n-1)$	$+m\mathfrak{B}\,a^{m-2}\,q^2\,\varkappa$
$+[3(m+1)-n]d\,p^m\,\varkappa(n-2)$	$+m\mathfrak{C}\,a^{m-3}\,q^3\,\varkappa$
$+[4(m+1)-n]e\,p^m\,\varkappa(n-3)$	$+m\mathfrak{D}\,a^{m-4}\,q^4\,\varkappa$
. .	. .
. .	. .
$\overset{n}{+\,n\,m\,a\,p^m\,\varkappa\,1}$ / $n\,a$	$+m\mathfrak{N}\,a^{m-n}\,q^1$
$p[a\;\;b\;\;c\;\;d\;.\;.\;.]$	$q[b\;\;c\;\;d\;\;e\;.$

(Hier ist na ein Divisor in alle Glieder über den Stri

Ist m eine positive ganze Zahl, so wird die N der Theile von $(a+q)^m\,\varkappa\,(n+1)$ auf die Größe der len n und m gegen einander ankommen. Hierher ge Herrn Tetens Anmerkungen (6, 7, 8 S. 21, 22).

Der Coefficient linker Hand ist nach Herrn Kästners Formel (Anal. des Unendl. §. 56, XI; Infin. Dign. p. 63, 7) ausgedrückt. Die Verglei

der beiderley Lokalzeichen (der Kästnerischen und der meinigen) hat auch Herr Prof. Rothe (Form. Ser. Rev. Dem. p. 4. (d)) gegeben. In beiden Formeln werden zwar die $\varkappa(n+1)$ durch $\varkappa n$, $\varkappa(n-1)$, $\varkappa(n-2)$ u. s. w. (die höhern Coefficienten durch die niedrigern) bestimmt; aber in der ersten gehören sie sämtlich zu derselben Potenz p^m, für welche $\varkappa(n+1)$ gesucht wird, in der zweyten hingegen zu den niedrigern Potenzen q^1, q^2, q^3, u. s. w. und so zeigen die Lokalausdrücke (hier 138, 139) mit einem Blicke, woher die Verschiedenheit beider Auflösungen: daß man nämlich in der ersten Formel einen spätern Coefficienten zu finden, alle vorhergehenden, durch die er bestimmt wird, zuvor finden muß; welches bey der zweyten Formel deswegen nicht nothwendig ist, weil (nach 138) $q^1 \varkappa n = a^n A$; $q^2 \varkappa(n-1) = b^n B$; $q^3 \varkappa(n-2) = c^n C \ldots$ $q^n \varkappa 1 = n^n \mathcal{N}$, die Complexionen aber aller Classen zur Summe n ganz independent von jeder andern Zahl sich finden lassen, und die den Classen beyzufügenden Binomialcoefficienten ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C} \ldots$ und Potenzen a^{m-1}, a^{m-2}, $a^{m-3} \ldots$ nicht die geringste Schwierigkeit machen.

Ich nehme bey dieser Vergleichung den Exponenten m ganz allgemein an; denn wenn m eine positive ganze Zahl ist, so lassen sich auch in der recurrirenden Formel die $p^m \varkappa n$, $p^m \varkappa(n-1)$ u. s. w. (nach 138) combinatorisch ausdrücken, und independent behandeln. Doch kann daraus das Resultat nicht so schnell gezogen werden, als wenn man die zweyte Formel dafür gebraucht.

218. Vergleichung der einfachen Substitutionsreihe mit der Potenzreihe; wo nämlich

$$p = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \&c$$
$$y = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \&c$$

gegeben ist, und man soll p nach Potenzen von z ausdrücken.

mel, von welcher ich (5. S. 159) gesprochen habe.
Name Methodus potentiarum, den ich ihr gegeben
rechtfertigt sich hinlånglich durch den Gebrauch.
noch allgemeinere Formel (Methodus productorum)
im *Nov. Syst. Perm.* p. LXXVI. ganz zuletzt. Die
Anwendung der Methode der Potenzen betri
Entwickelung der gebrochenen Functionen (Infin.
p. 102 — 106. Nov. Syst p. LXXVII — LXXXIII
man hier viel bequemer als auf dem Moivrischen
haben kann. Ein sehr merkwůrdiges Beyspiel von
wickelung einer gebrochenen Function, von Herrn
Grange, wo er das Verfahren dafůr nach de M
einleitet, die dadurch gefundenen Glieder immer weit
weiter aus einander setzt, und zuletzt auf ein Gesetz
geleitet wird, das er fůr ganz einfach hålt, um di
der daraus herzuleiten, und in den gegebenen Grőßen
zudrůcken — dieses Beyspiel in Toepf. Comb. Ana
116 — 123). Die Coefficienten die Herr de la Gr
ganz zuletzt findet, und deren weitere Berechnung
empfiehlt, weil sie fůr alle mőgliche Functi
von x dienten, sind keine andern, als die combinato

gen der großen Extension, eine der Erheblichsten und
auchbarsten ist. Die oben angeführte Stelle aus Toep-
s Comb. Anal. verdient nachgelesen und reiflich erwo-
n zu werden. Auch giebt es noch viel zusammengesetz-
e gebrochene Funktionen, als die, von welcher hier ge-
et worden, und welche gleichwohl die combinatorische
ethode mit Leichtigkeit entwickelt. Hierher gehört (Infin.
gn. p. 120, 1; Nov. Syst. Perm. p. XLVI, 21; vor-
glich aber Arch. der Math. H. II. S. 227, 8). Die
fin. Dign. p. 125, 126) dafür beygebrachte Formel von
ıler ist, wegen der übergroßen Verwickelung, ganz
brauchbar. Man kann der combinatorischen Methode
ne größere Lobrede halten, als die sich aus der unmit-
baren Vergleichung der Substitutionsverfahren dieser bei-
n großen Analysten, mit dem combinatorischen, von selbst
giebt!

219. Hier ist ein Substitutionsverfahren anderer
t, das auf nützliche Relationen, durch Lokalformeln
sgedrückt, führt, und sehr leicht sich übersehen läßt.

(S. 133, 11) aufgestelltes Princip. Solche Rei-
sind nützlich, besonders bey der Euectione con-
serierum ad Dignitates. Weil $qg^{hl}\varkappa(n+1) = p^{fghl}\varkappa$
so ist auch $q^{l}\varkappa(n+1) = p^{fl}\varkappa(n+1)$; u. s. w.

220. Darstellung der vorzüglichsten S-
Umkehrung der Reihen in lokal- und combinat-
analytischen Formeln.

I. Recurrirende dependente Formen.

Es sey $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ …
Man soll y durch z ausdrücken, oder in der Gleich-

$$y = \dot{\mathfrak{A}}z + \dot{\mathfrak{B}}z^2 + \dot{\mathfrak{C}}z^3 + \dot{\mathfrak{D}}z^4 + \ldots$$

Die angenommenen Coefficienten (215. S. 2…
$\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{B}}, \dot{\mathfrak{C}}, \dot{\mathfrak{D}}$… durch a, b, c, d… bestimmen.

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{\cdots}{a};\ \dot{\mathfrak{B}} = -\frac{\cdots}{a^2};\ \dot{\mathfrak{C}} = -\frac{\cdots}{a^3};$$

$$\dot{\mathfrak{D}} = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}\,d + \dot{\mathfrak{B}}\,b^4B + \dot{\mathfrak{C}}\,c^4C}{a^4};\ \dot{\mathfrak{E}} = -\ \&c$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & b & c & d & e & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\right)$$

r hat man de Moivre's wörtlich gegebene Vor-
ift symbolisch dargestellt; und diese combina-
rische Darstellung enthält zugleich das harmonische
rtschreitungsgesetz der angenommenen Coefficien-
ganz anschaulich, das de Moivre, weil es ihm
schicklichen Zeichen dazu fehlte, durch einige berechnete
eder (mehrere findet man in Tempelh. Anfgr. der An.
l. Gr. S. 610 u. f.) nur dunkel nachweisen konnte.

Nach dem von mir (in 2) angegebenen combinato-
hen Gesetze, lassen sich die Coefficienten $\dot{\mathfrak{A}}, \dot{\mathfrak{B}}, \dot{\mathfrak{C}}, \dot{\mathfrak{D}}\ldots$
emein viel leichter berechnen, als nach de Moivre; denn
st, weil $\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a}$, jedes erste Glied im Zähler der Brüche
diese Coefficienten, sogleich gegeben; 2) jedes letzte
d dieser Zähler hört mit einer niedrigern Combina-

p. 23, 24) combinatorischer Formel

$$ {}^{0}m = \frac{s}{r};\ {}^{1}m = \frac{s+d}{r};\ {}^{2}m = \frac{s+2d}{r}; $$

$$ \text{ist } x^s = \left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{{}^{0}m} - {}^{0}m\,\frac{a^{1}A}{\alpha}\left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{{}^{1}m} $$

$$ - {}^{0}m\left\{\frac{a^{2}A}{\alpha} - \frac{{}^{2}m+1\,\mathfrak{A}b^{2}B}{2\alpha^{2}}\right\}\left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{{}^{2}m} $$

$$ - {}^{0}m\left\{\frac{a^{3}A}{\alpha} - \frac{{}^{3}m+1\,\mathfrak{A}b^{3}B}{2\alpha^{2}} + \frac{{}^{3}m+2\,\mathfrak{B}c^{3}C}{3\alpha^{3}}\right\}\left(\frac{y^l}{\alpha}\right) $$

$$ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} $$

4) Nach Rothe's (Formulae de Ser. Re monstr. p. 11) Lokalformel (die ^{0}m, ^{1} aus (3) auch hier beybehalten) ist

$$ x^s = \frac{s}{s}q^{-{}^{0}m}\varkappa 1 y^{{}^{0}ml} + \frac{s}{s+d}q^{-{}^{1}m}\varkappa 2 y^{{}^{1}ml} + \frac{s}{s+2d}q^{-{}^{2}m}\varkappa 3 $$

$$ q[\ \alpha\ \ \beta\ \ \gamma\ \ \delta\ \ \varepsilon\ \ .\ \ .\ \ .\ ] $$

$$\dagger 1) = -{}^{\circ}m \left\{ \frac{a^{n}A}{\alpha} - \frac{{}^{nm+1}\mathfrak{A}b^{n}B}{2\alpha^{2}} + \frac{{}^{nm+2}\mathfrak{B}c^{n}C}{3\alpha^{3}} - \frac{{}^{nm+3}\mathfrak{C}d^{n}D}{4\alpha^{4}} \ldots \pm \frac{{}^{nm+n-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}}\, n^{n}\mathcal{N}}{n\alpha^{n}} \right\} \left(\frac{y^{l}}{\alpha}\right)^{nm}$$

6) Eine von mir vorgenommene Verwandlung desselben, giebt verkürzt und ganz harmonisch

$$\dagger 1) = \frac{{}^{\circ}m}{{}^{n}m} \left\{ \frac{{}^{-nm}\mathfrak{A}a^{n}A}{\alpha} + \frac{{}^{-nm}\mathfrak{B}b^{n}B}{\alpha^{2}} + \frac{{}^{-nm}\mathfrak{C}c^{n}C}{\alpha^{3}} \ldots \right\} \left(\frac{y^{l}}{\alpha}\right)^{nm}$$

7) Daraus, so wie aus der Formel (4) folgt

$$(n+1) = \frac{s}{s+nd}\, q^{-\frac{s+nd}{r}}\, \varkappa(n+1).\, y^{\frac{(s+nd)l}{r}}$$

eiger für (5, 6) und die Scale für (7) sind hier y (3 und 4); auch sind in (7) für ${}^{\circ}m, {}^{1}m, {}^{2}m \ldots {}^{n}m$ Berthe (aus 3) gesetzt worden.

Das allgemeine Glied (in 7) enthält die sehr wichtige Reduktion der Coefficienten der Umkehrungsformel

auf Coefficienten der Potenzformel. Ich war, durch die vermißte Harmonie der Binomialcoefficienten mit den Combinationsclassen in der Eschenbachischen Formel (5), zu der harmonischen Verwandlung (6) und durch sie auf die Formel (in 7) geleitet worden (Toepf. comb. Anal. S. 170 — 173 und Taf. VIII). Herrn Prof. Rothe hat ein strenger Beweis des Fortgangsgesetzes der Coefficienten seiner Lokalformel (4) darauf geführt (Rothe l. c. p. 11). Wie diese Reduktion aus einem sehr allgemeinen Satze Herrn de la Grange's sich ableiten lasse, hat Herr Professor Pfaff gezeigt (Arch. der Math. H. I. S. 83—87). Von der Wichtigkeit dieser Reduktion und den Vorzügen der Formel (in 7) vor der unreducirten (in 5) sehe man Rothe l. c. p. 13 — 15; Toepf. S. 176 — 180; auch meine Paralip. ad Ser. Reverſ. p. XIX — XXIII, wo noch einige andere Formenverwandlungen der Lokalfunktion $\frac{^{o}m}{^{n}m} q^{-nm} \varkappa (n+1)$ vorkommen.

8) Aus (4) folgt sehr leicht (Rothe l. c. p. 21, 22)

$$\log x = \log. \alpha^{-\frac{1}{r}} y^{\frac{l}{r}} + \frac{1}{d} q^{-\frac{d}{r}} \varkappa 2 y^{\frac{dl}{r}} + \frac{1}{2d} q^{-\frac{2d}{r}} \varkappa 3 y^{\frac{2dl}{r}} \ldots + \frac{1}{nd} q^{-\frac{nd}{r}} \varkappa (n+1) y^{\frac{ndl}{r}} + \ldots$$

(die Gleichung, wie in (3), die Scale, wie in (4)

9) Für die Doppelreihe

$$a z^{fr} + b z^{f(r+d)} + c z^{f(r+2d)} + \ldots = \alpha x^{r} + \beta x^{r+d} + \gamma x^{r+2d} + \ldots$$

(nach Eschenbach (l. c. §. VIII) und Rothe (l. c. §. IX) ist

angewendet hatte. Die Lokalausdrücke machen die nel, bey der großen Verwickelung, die sie hat, viel icher und zum Gebrauche bequemer.

10) Für die allgemeinste Form der Reihen

$$+ bz^{l+d} + cz^{l+2d} + \&c = \alpha x^{\lambda} + \beta x^{\lambda+\delta} + \gamma x^{\lambda+2\delta} + \&c$$

= (die Formel dafür; Paral. ad Ser. Reverſ. p. III).

Der Ausdruck für $x^{s'}$ kann bey der Allgemeinheit jede Werthe von l, d, λ, δ, s) nicht kurz seyn; ich mich also hier nur darauf berufen wollen.

11) Die Formel (10) schließt alle vorhergehenden ch; inzwischen, wo man mit diesen ausreicht, braucht zu der allgemeinsten seine Zuflucht nicht zu nehmen. wird aber für viele Fälle ganz unentbehrlich, wenn unnöthige Weitläuftigkeiten (Paral. p. XV, XVI) veren will; daher war ihre Aufstellung nothwendig, und t den Anfang in den Paralip. ad Ser. Reverſ. Die Forfür die Moivrische und Tempelhofische Form, kann sehr leicht (aus 9) ableiten. Man findet sie (Paral. XI). Zuletzt noch ein Paar Beyspiele.

$$= \frac{\qquad}{\alpha^7} \qquad \overline{\qquad\qquad} \; z^2 V z$$

Die Scalen und Zeiger sind, wie hier p und q
sen. Hier ist zugleich der Fall, wo die Combina-
classen sich auf mehr als eine Reihe beziehe
daher die Reihenexponenten q, p überschrieben sind

13) Für $az^3 + bz^5 + cz^7 + \ldots = \alpha x^1 + \beta x^2 +$
die Anfangsglieder der Potenz x^s anzugeben.

Die beiden Gleichungen von der Form in (9) a
zu machen, müßte man von beiden Seiten Glied
schieben, und ihre Coefficienten o setzen. Das e
die Auflösung gar sehr durch Weitläuftigkeit, in
dadurch verfällt (192 und Paral. p. XV, XVI).
vergleiche sie also vielmehr mit der allgemeinsten For
indem man $l = 3$; $d = 2$; $\lambda = \delta = 1$ setzt, so

$$x^s = \alpha^{-s} a^s z^{3s} - * + s\alpha^{-s} a^{s-1} b z^{3s+2}$$

$$- s\alpha^{-(s+2)} \beta a^{s+1} z^{3s+3} + \text{(mehrere Gliede}$$

meinen Paral. ad Ser. Reverſ. p. XIV.).

solcher Zeichen insbesondere, durch welche die Sätze
r einander so leicht sich vergleichen, die Auflösungen,
t der verwickeltsten Aufgaben, so deutlich nachweisen,
so bequem verrichten lassen. Eine anschauliche Ueber-
meiner, größtentheils combinatorischen, Zeichen und
Anwendung, geben die Tafeln I, VI, VII, VIII bey
n Magister Toepfers combinatorischer Analytik.
hier Beygebrachte lehrt den Mechanismus dieser Zei-
, ihre Beziehung auf einander, das Verhalten insbe-
ere der Lokalzeichen gegen die combinatorischen, und
gegen die auf gewöhnliche Art ausgedrückten, ge-
r kennen. Hier werden immer Form und Materie
nmen vorgelegt; jene, durch die lokal- oder combina-
chen Ausdrücke der Formeln, diese, durch die unten
fügten Scalen oder Zeiger; und so wird man, in
hung auf so viele bereits aufgestellte erläuternde Bey-
, zugleich ersehen, was ich darstellende Zeichen
, a) nenne, und in wie fern solche auf eine allge-
e Aufnahme Anspruch machen können. Irre ich
nicht, so habe ich das, was Leibnitz von einer
ren und ächten Verbindungskunst fordert — vt
s per illam quasi picta, veluti Machinae ope in charta
ssa, deprehendatur — nach Möglichkeit erreicht.

genflichen Analysis ausmachen. Eine und
Größe läßt sich, in Absicht auf die Form, nicht sel
sehr mannichfaltig verschiedene Arten darstellen und
ten. Diese Formen lassen sich oft, eine für die andere,
tuiren, so daß es ganz gleichgültig ist, welche man geb
Dennoch hat jede ihre eigenthümlichen Vorzüge.
len wird die bestimmte Art von Form durch die Bed
gen vorgeschrieben; auch lassen sich gewisse Absichte
so bequem erreichen, manche Vorschriften gar nich
gen, wenn man nicht die zugehörige, dafür p
Form wählt. Eine genaue Kenntniß solcher Form
ihrer Anwendung ist also für die Analysis von be
der Wichtigkeit. Vor andern sind hier die com
torischen Involutionen (die lexikographi
vornehmlich, und die, deren Complexionen wie Z
fortgehen) die vorzüglichsten; daher auch Her
Klügel die Darstellung der möglichen Gattung
Combinationen empfiehlt (S. 89). Es ist
türlich, einen dahin führenden Weg unvermerk
schlagen, daß sogar verschiedene Analysten diesen For
äußerst genähert haben, wie de la Grange (S.29

ng sie seyen. Die combinatorische Analysis endlich den Schleyer aufgedeckt, und es bleibt hinfort nicht mehr dem blinden Ungefähr überlassen (205), ob und wenn es die Legem Naturae herbeyführen will. Die Spur, auf welcher die Göttinn wandelt, ist hier überall deutlich vorgezeichnet, und kann man sie nunmehr festen sichern Fußes verfolgen.

Ea est methodorum simplicissimarum ratio, atque natura, ut postremae in mentem veniant, et, nisi aliquanto obstinatiore quaerantur animo, ne veniant quidem.

Boscov. Opp. pert. ad Opt. et Astr. T. II. p. 221. §. 83.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

3) Len.

p^{m} I)

$a^n Az^n = p^1 ⁊ n$

$b^n Bz^n = p^2 ⁊ (n-1)$

$\frac{m}{1} = c^n Cz^n = p^3 ⁊ (n-2)$

.. $d^n Dz^n = p^4 ⁊ (n-3)$

$e^n Ez^n = p^5 ⁊ (n-4)$

[$f^n Fz^n = p^6 ⁊ (n-5)$

" "

$+ \overset{4}{\delta z^4} + \overset{5}{\varepsilon z^5}$ . .

$p^m q^{-\mu} r^n$; $p^m q^{-\mu} r^n s^{-\nu}$

n selbst die Classenzeichen n
q, r, s, . . . ꝛc. bezeichn

^{n}𝔄a$^n \overset{p}{A}$; $-^{\mu}$𝔅p$^n \overset{q}{B}$;

ℭc$^n \overset{r}{C}$; $-^{\nu}$𝔇d$^n \overset{s}{D}$; etc.

ign. §. XXVI. Hier w
rn verwickelten zusamm
n, der Gebrauch der Local
htig.

rstellen, wenn solche v

r d n u n g. markirte Dimensions.=Ze
269. §. 275.

4 — 36. rdnung; §. 269.

(2𝔑); (2n); 2t p+3t p+nt

I I

2nm+2r

(2IN), ... 2t q+3t q+nt

, A . . . . A

2nm+2r

n. (2𝔑), ... 2t r+3t r+nt

1. 𝔄 . . . . 𝔄

2n+2 2n

(2IN), . . . (2I 2t s+3t s+nt

2n+2 2r a . . . . a

(2𝔑), . . . (2𝔑. etc. etc.

rstellen, wenn solche v

g G = VII	t

, 3ten, ... n^{ten}

; $\overset{r}{\mathfrak{D}}$ = $\overset{r}{IV}$; $\overset{r}{\mathfrak{E}}$ =

e vom 2ten Gliede a

$\overset{r}{\mathfrak{F}} = f^{r-1.6}F$	t
$^{r}F = \overset{r+1.6}{\mathfrak{F}}$	g

$\overset{r}{\mathfrak{B}}$, $\overset{r}{\mathfrak{C}}$. . . . . . a
b ^{r}B, c ^{r}C. . . . . .

vom 3ten Gliede

$\overset{r}{\mathfrak{F}} = f^{r-2.6}F$	t
f $^{r}F = \overset{r+2.6}{\mathfrak{F}}$	g

$\overset{r}{\mathfrak{B}}$, $\overset{r}{\mathfrak{C}}$ . . . . .
b ^{r}B, c ^{r}C . . . . .

rstellen, wenn solche v

(N)	$=$	$\mathfrak{n}$	$=$	$\mathfrak{n}^{n\mu}\mathfrak{N}$
$\overset{+1}{(N)}$	$=$	$\mathfrak{n}^{\overset{++\delta}{N}}$	$=$	$\mathfrak{n}^{n\mu+\delta}$
$\overset{+2}{(N)}$	$=$	$\mathfrak{n}^{\overset{-+2\delta}{N}}$	$=$	$\mathfrak{n}^{n\mu+2\delta}\mathfrak{N}$
5	6	"		"

ɪkürzten, in Hinde

$4^3 a^5 A$	$+ 6a^2 b^6 B$	${}^n\mathfrak{C} a^{n-3} c^{n+3} C \ldots - {}^n\mathfrak{A} a n^{2}$
$4^3 a^6 A$	$+ 6a^2 b^7 B$	${}^n\mathfrak{C} a^{n-3} c^{n+4} C \ldots - {}^n\mathfrak{A} a n^{2n}$
$4^3 a^7 A$	$+ 6a^2 b^8 B$	$a^{n-3} c^{n+5} C \ldots - {}^n\mathfrak{A} a n^{2n+1}$
$4^3 a^8 A$	$+ 6a^2 b^9 B$	$\mathfrak{C} a^{n-3} c^{n+6} C \ldots - {}^n\mathfrak{A} a n^{2n+2}$
"	"	" "
"	"	" "
$aa^{r-3} A$	$+ 6a^2 b^{r-2} B$	$+ {}^n\mathfrak{C} a^{n-3} c^{r-n+3} C \ldots - {}^n\mathfrak{A} a$

ntern für ungerade Werthe
, ist die ganze Zahl 2n+

qp =

α -

nd

er

: Art.

ourg Inf. Dign. p. 146.)

$[\mu+(p-1)\delta]$ | $^{m-3}\mathfrak{C}^{p+3}+\ldots\ldots \quad \pi a^{m-p}\mathfrak{P}^{2p}$ } für

$\mu+(p-1)\delta]$ } $^{n-3}c^{p}C+\ldots\ldots \quad \mathfrak{P}a^{m-p}p^{p}P$ } x=1

$\ldots\ldots\ldots)$

$\ldots\ldots\ldots)$

; $\left(\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & d & e\end{matrix}\right.$.

. 40.]

$'B + \ldots\ldots \; {}^{m}\mathfrak{N}a^{m-n}n'\mathfrak{N}$

$\ldots\ldots)$

$^{n-2}\mathfrak{b}^{2}B)x^{n\mu+2\delta}\ldots\ldots)$

$^{-2}\mathfrak{b}^{3}B + {}^{n}\mathfrak{C}a^{n-}\ldots$

« « uf die in II. reducirt.

$a^{n-2}\mathfrak{b}^{p}B + {}^{n}\mathfrak{C}^{p}\gamma^{q}\delta^{r}\varepsilon^{s}\ldots\ldots$

$qc+rd+se\ldots\ldots$

$\ldots\ldots + {}^{n}$

o, 11; p. 148—150.

α^4 ...... $\Big) \Big(\alpha \Big)$

$y^{\Sigma} \gamma \left(\frac{ZA}{\alpha}\right)^{n_m}$ $) = \frac{m}{{}^n m} . w -{}^n m \varkappa (n+1) . z^{{}^n m A}$

hen Umkeh

$= x^m +$

vom 2ten an gezählt.

$\cdot nr + 3m \overset{n+4}{\mathfrak{D}}$
$4m$

etc.

$. . \frac{t + 4r + }{3m} \frac{\cdot nr + 3m}{4m} . . . . l. \frac{t + nr + (n-}{nm}$

le der E

E	Σ	b ^{n}B	c^{n}C	d^n D
Fi	t	$\overset{n+2}{\mathfrak{B}}$	$\overset{n+3}{\mathfrak{C}}$	$\overset{n+4}{\mathfrak{D}}$

Verbesserungen und Druckfehler.

Seite 8 Zeile 5 statt x^{n-} lese man x^{n-1}; S. 10. Z. 6 st. $a.|n|$ l. $2a|n|$; S. 10. Z. 11 st. $b|n-1|$ l. $2b|n-1|$; S. 13 unten in der Formel für $(a+q)^m \varkappa n$ muß $n-1$ durchaus in der Mitte zwischen beiden Buchstaben stehen, auch statt $\mathfrak{M}$ gesetzt werden $\mathcal{M}$; S. 141. Z. 11. st. $(p\,q_a)$ l. $(p\,q^a)$; S. 153. Z. 3 von unten, st. besseres zu sagen, l. besseres in der Kürze zu sagen; S. 176. Z. 5 von unten st. 23. Aufgabe l. 33. Aufgabe; S. 219. Z. 3 von unten, statt $a^{n-m}\,{}^{v}\mathcal{M}$ l. $a^{n-m}\,{}^{v}\mathcal{M}$; S. 233. Z. 7 von unten st. $m\mathcal{M}$ l. $m\,'\mathcal{M}$; S. 240. Z. 17. st. $r^c \varkappa 1\ q^b \varkappa 3\ p^a \varkappa 1$ l. $r^c \varkappa 3\ q^b \varkappa 1\ p^a \varkappa 1$. S. 258. Z. 10. statt 189 l. 159 und so weiter bey allen folgenden Paragraphen, die aus Versehen so sind fortgezählt worden. S. 256. Z. 5. dann aufmerken l. dann genau aufmerken. S. 259. Z. 11. zu den Worten „Noch geben die obigen Reihen“ ist noch hinzuzusetzen: für welche

$$p^a \varkappa 1 = \alpha^a \text{ und } p^a \varkappa (n+1) = {}^{a}\mathfrak{N}\, \alpha^{a-n} \beta^n$$

$$q^b \varkappa 1 = f^{vb} \quad . \quad q^b \varkappa (n+1) = {}^{vb}\mathfrak{N}\, f^{vb-n} g^n$$

$$r^c \varkappa 1 = 1 \quad . \quad r^c \varkappa (n+1) = \frac{c^n}{1.2.3\ldots n}$$

urch zugehörige Bestimmung von n, die Coefficienten 5. 288. Zeile 4 l. die Bemerkung der Ordnungen A, ${}^{n}B$, ${}^{n}C$ u. s. w.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hindenburg, Carl Friedrich, 1741-1808 / Hindenburg, Carl Friedrich, /
Tetens, Johann Nicolaus,

Der polynomische Lehrsatz das wichtigste Theorem der ganzen Analysis nebst einigen verwandten und andern Sätzen nebst einigen verwandten und andern Sä tzen

Leipzig 1796

Math.p. 305 d
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082292-2
VD18 11517271-002